

Esercizio:

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo **simmetrico** con
 $\text{Im } f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $d=2$ **autoreale**.

- 1) Determinare $A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f}$.
- 2) Determinare una base ortonormale di autovettori.
- 3) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che
 $v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento:

1) ② $A = A^t$ $\text{Im } f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ① $\text{Im } f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

① $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a=b \\ a=c \\ b=c \end{cases}$

② $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

③ $d=2$ e autoreale $\Leftrightarrow \det(A - 2I_3) = 0$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-2 & a & a \\ a & a-2 & a \\ a & a & a-2 \end{pmatrix} \stackrel{3^a - 2^a}{=} \det \begin{pmatrix} a-2 & a & a \\ a & a-2 & a \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -2 \det \begin{pmatrix} a-2 & a \\ a & a \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} a-2 & a \\ a & a-2 \end{pmatrix} = \\ &= -2(a^2 - 2a - a^2) - 2(a^2 - 4a + 4 - a^2) = \end{aligned}$$

$$= 4a + 8a - 8 = 12a - 8 = 0$$

$$12a - 8 = 0$$

$$12a = 8 \quad a = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \dim \text{Im} f = 1 \Rightarrow \dim \text{Ker} f = 2$$

$$\text{Oss: se } \text{Ker} f \neq \{ \vec{0} \} \Rightarrow \text{Ker} f = V_0 = \text{Ker}(A - 0I_3) = \text{Ker} A$$

$$V_0 \perp V_2$$

$$f(v_3) = 2v_3 \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad V_2 = \langle v_3 \rangle$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^\perp \perp \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$v_3 \neq \vec{0} \quad \dim \begin{matrix} \langle v_3 \rangle \\ 1 \end{matrix} \leq \dim \begin{matrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ 1 \end{matrix}$$

$$V_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^\perp : x + y + z = 0$$

$$\textcircled{2} = -x - y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} A = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cerchiamo una base ortonormale di V_0 applicando G-S

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{perché } \|v_1\| = \sqrt{2}$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$w_2 \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \|w_2\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

$$V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$V_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^\circ \\ 1^\circ + 23^\circ \\ 2^\circ - 3^\circ}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z = -z + 2z = z \\ y = z \end{cases} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$V_2 = \langle v_3 \rangle \quad \text{essendo } v_3 \neq \vec{0} \quad f(v_3) = 2v_3 \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \text{Im} f \Rightarrow$$

$$\langle v_3 \rangle = \langle 2v_3 \rangle \subseteq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow \langle v_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Una base ortonormale di autovettori è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$$A \sim_{\text{ort}} D = \begin{pmatrix} \textcircled{0} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{0} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \end{pmatrix}$$

$$K \in O_3(\mathbb{R}): K^t A K = D$$

$$K = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio per casa: $A \in \mathbb{R}_{3,3}, g$ endomorfismo **simmetrico**
 $\text{Im} g = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad d=3 \quad \text{autovale.}$

3) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(v) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$I_3 v - f(v) =$$

$$= (I_3 - A)v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ + 2 \cdot 1^\circ \\ 3^\circ - 2^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ -3y - 6z = 9 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 2z + 3 = -2 - 2 + 3 = -1 \\ z = -1 \\ y = z = -1 \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3} u_3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \sqrt{3} u_3$$

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (v)_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$(v)_B - D(v)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - D) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad v = 0 u_1 + 0 u_2 + \sqrt{3} u_3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quiz: per quali tre questi valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ ax+5y \\ 8z \end{pmatrix} \quad \text{è simmetrico?}$$

① $a=0$

② $a=1$

~~③~~ $a=2$

④ $a=3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a=2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 5+a & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1+a & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f_a)}$ di $\text{Ker}(f_a)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f_a)}$ di $\text{Im}(f_a)$. (2 pti)

ii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$. (2 pti)

iii) Determinare, se esistono, tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A_a . (1 pto)

iv) Determinare la matrice P della proiezione ortogonale sul sottospazio $\text{Im}(f_0)$. Calcolare P^{32} . (2 pti)

(voltare pagina)

ii) Per il Teorema spettrale A_a è ortog. diagonalizzabile

se e solo se $A_a = A_a^t \Leftrightarrow a=0$

$$A_a = A_a^t \quad \begin{cases} 5+a=5 \\ 1=1+a \\ 5=5 \end{cases}$$

$\text{rg } A_0 = 1 \quad \text{Im } f_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim \text{Ker } f_0 = 2 \quad \text{Ker } f_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x+5y+z=0 \right\}$

$\Rightarrow z = -x-5y \quad \text{Ker } f_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-5y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle = V_0$

Essendo $A_0 \sim_{\text{ort}} D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ e $\text{tr } A_0 = 27 = \text{cr } D = d \Rightarrow d=27$

Allora $V_{27} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ infatti $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

σ_3

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+25+1 \\ 5+25+5 \\ 1+25+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 35 \\ 27 \end{pmatrix} = 27 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \quad \text{non è ortogonale}$$

ii) Imponiamo $f(u) = A_a u = d u$ con $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5+a & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1+a & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5+a+1 \\ 5+25+5 \\ 1+a+5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+7 \\ 35 \\ a+7 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+7=d \\ 35=d \\ a+7=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d-7=35-7=28 \\ d=35 \end{cases}$$

$$a=28$$

ii) $P^2 = P$ perché P è matrice di proiezione

$$P^2 = P \Rightarrow P^n = P \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Matrice di proiezione ortogonale $P(u) = (u \cdot u) u$

$$P\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = u u^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u u^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Im } f_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{27}} \\ \frac{5}{\sqrt{27}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{27}} & \frac{5}{\sqrt{27}} & \frac{1}{\sqrt{27}} \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{27}} \\ \frac{5}{\sqrt{27}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} \end{pmatrix}$$

$$3 \times 1 \quad 1 \times 3 \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{5}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{5}{27} & \frac{25}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{5}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} = \frac{1}{27} A_0$$

$$H^{-1}PH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H^{-1}A_0H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Esempio: se $A \sim_{\text{out}} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = A^{33}$ perché $D_1^{33} = D$

Geometria Affine

Definizione: uno spazio affine su $\mathbb{R}$ è $(A, V, +)$

① A un insieme detto insieme dei punti $P \in A$;

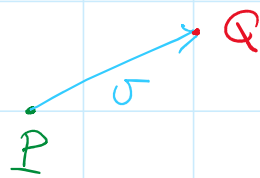
② V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ detto **giacitura dello**

spazio affine A o **spazio direttore** $V \in V$;

③ una funzione detta **azione**

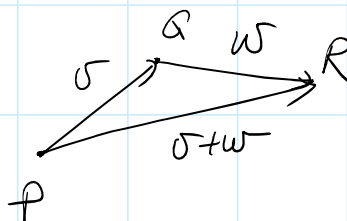
$$+ : A \times V \longrightarrow A$$

$$(P, v) \longrightarrow P + v = Q$$



Con queste proprietà:

② $(P + v) + w = P + (v + w)$



③ Azione è **transitiva**

fissiamo $P \in A \forall Q \in A$ esiste $v \in V$ tale che

$$P + v = Q$$

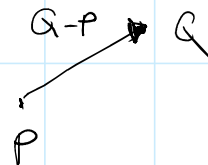


© Azione $\bar{e}$ fedele

$\forall P, Q \in A$ esiste unico il $\sigma \in V$ tale che
 $\exists!$ $P + \sigma = Q \in UN(\mathcal{G})$.

$$P + \sigma = Q$$

$$\sigma = Q - P$$



Si chiama dimensione di $A = \dim V$

Per definizione ϕ è uno spazio affine

di dimensione $\dim \phi = -1$

Esempi:

Spazi affini standard:

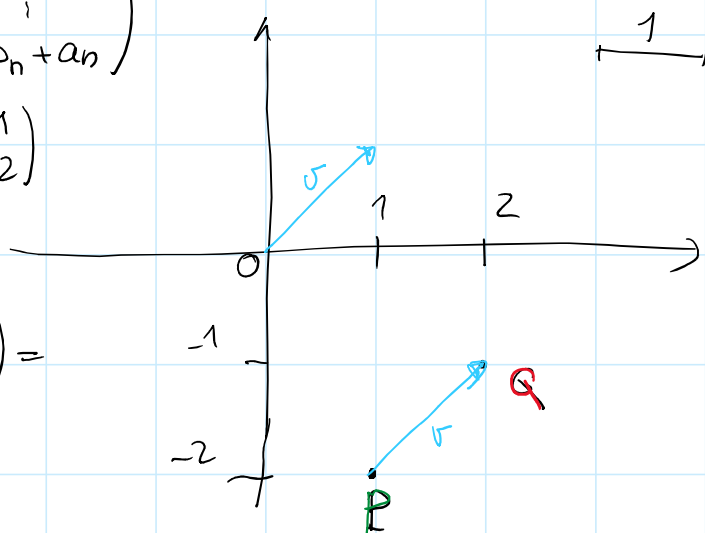
$$A = \mathbb{R}^n \quad V = \mathbb{R}^n \quad +: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + a_1 \\ \vdots \\ p_n + a_n \end{pmatrix}$$

$$n=2 \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P + \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = Q$$



Sottospazi affini = Sottovarietà lineari in A

e- $L: P+W = \{ P+w \mid w \in W \}$ con $W \leq V$

Punto + giacitura

Giacitura o spazio direttore $= W$ $\dim L = \dim W$

Esempio:

$A = \mathbb{R}^2$

Sottov. lineari

dimensione

Insieme vuoto

$\emptyset$

-1

Punti

$\{P\}$

0

Rette

$r: P + \langle v \rangle \quad v \neq 0$

1

Piano

$P + \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$

2

$\uparrow$
lin. indep.

$A = \mathbb{R}^3$

Sott. lin.

dimensioni

Ins. vuoto

$\emptyset$

-1

Punto

$\{P\}$

0

Retta

$r: P + \langle v \rangle \quad v \neq 0$

1

Piano

$\pi: P + \langle v_1, v_2 \rangle$

2

$\uparrow$
lin. indep.

Tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$

3