

Sia $B_K = \begin{pmatrix} 2 & K^2 & K-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, per quali K la matrice B_K è ortogonualmente diagonalizzabile?

Determinare per tale matrice B una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D t.c. $D = H^{-1} B H$

Si consideri $A_K = \begin{pmatrix} 1 & 2K-2 & K+1 \\ 0 & 2K-1 & K \\ 0 & -2K+2 & -K \end{pmatrix}$, $K \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- B è ortogonualmente diagonalizzabile? Se sì determinare una base ortonormale di autovettori di B
- $\forall K \in \mathbb{R}$, determinare λ di A_K e la loro m.a.
- per quali K , A_K è diagonalizzabile?
- determinare $K_0 \in \mathbb{R}$ t.c. A_{K_0} sia simile a B , determinare K invertibile t.c. $B = K^{-1} A_{K_0} K$

ESERCIZIO 1 → trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^5 = (1+i)^2 + 3 \frac{1+2i}{2-i}$$

ESERCIZIO 2 → determinare la forma algebrica di $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \right)^4$

determinare la forma trigonometrica di tutti i complessi z t.c. $z^3 = w$

ESERCIZIO 3 → Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerano i sottospazi:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- determinare l'equazione cartesiana di U
- determinare una base di $U \cap W$ e completarla a una base di $U + W$.
I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- determinare un sottospazio U' e un sottospazio W' t.c. $U + W = U \oplus U' = W \oplus W'$
è possibile avere $U' = W'$?

ESERCIZIO 4 → $\Phi_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+kz+(k-1)w \\ 2x+ky+2z \end{pmatrix}$$

- determinare A_k associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio
- per $k=0$ determinare base di $\ker \Phi_0$ e base di $\text{Im} \Phi_0$
- $\forall k \in \mathbb{R}$ determinare base di $\ker \Phi_k$ e base di $\text{Im} \Phi_k$
- $\forall k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata alla scelta della base canonica $\mathcal{E}_3$ sia nel dominio che nel codominio è:

$$A = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori del parametro reale k per i quali $f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ non sia invertibile.
- Per tali valori di k , determinare una base del nucleo e delle equazioni per l'immagine di $f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che si abbia

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $W = \langle (1, -2, -1), (2, 1, 3) \rangle$ e sia $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la simmetria ortogonale di asse W .

- Determinare una base ortonormale di autovettori di σ .
- Determinare $\sigma(0, -1, 5)$.
- Determinare tutti i vettori v per i quali $v + \sigma(v) = (-2, 4, 2)$ e $\sigma(v)$ è ortogonale a v .