Domanda 17: se $A \sim_{ort} D$ allora $A = A^t$.

Osservazione: se $A \sim_{ort} S$ con $S = S^t$ allora anche $A = A^t$.

Dim. $A \sim_{ort} S \Rightarrow S \sim_{ort} A$ $\quad H^t S H = A$ $\quad$ con $H \in O_n(\mathbb{R})$

$$A = H^t S H = H^t S^t (H^t)^t = A^t.$$

Teorema spettrale (enunciato):

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$.

Domanda 18: data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $A = A^t$ allora $p_A(x)$ ha tutte radici reali.

Dimostrazione:

Sia $a \in \mathbb{C}$ una radice $p_A(x)$ cioè $p_A(a) = 0$ e dimostriamo che $a \in \mathbb{R}$ dimostrando che $a = \bar{a}$.

Essendo $p_A(a) = 0 \Longrightarrow a$ è un autovalore complesso $\Rightarrow$ esiste un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ $v \neq \vec{0}$ tale che $\boxed{Av = av}$

Osserviamo che $\quad \bar{v}^t v = (\bar{z}_1\ \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} =$ $\qquad z_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 1, \dots, n$

$= \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_n z_n =$ $\qquad \bar{z}_i z_i = |z_i|^2$

$= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0$ $\boxed{\bar{v}^t v \neq 0}$

$z = a+ib$
$\bar{z}z = a^2+b^2 = |z|^2$

$$\boxed{\bar{v}^t A v} = \begin{cases} \bar{v}^t (Av) \overset{1}{=} \bar{v}^t (av) = a\,\bar{v}^t v \\ (\bar{v}^t A)\, v \underset{A = A^t}{=} (\bar{v}^t A^t) v = (A\bar{v})^t v \overset{2}{=} (\bar{a}\,\bar{v})^t v = \bar{a}\,\bar{v}^t v \end{cases}$$

1. $\boxed{Av = av}$
2. $\bar{A}\bar{v} = \boxed{A\bar{v} = \bar{a}\bar{v}}$

Essendo $\bar{v}^t v \neq 0$

$a(\bar{v}^t v) = \bar{a}(\bar{v}^t v)$ moltiplicando per $\frac{1}{\bar{v}^t v}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = \bar{a}}$ $\square$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ha autovalori $0, 0, 9$.

Domanda 19:

Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $A = A^t$ e d_1, d_2 due autovalori distinti di A allora $V_{d_1} \perp V_{d_2}$ cioè $\boxed{\forall\, v \in V_{d_1} \text{ e } w \in V_{d_2} \quad v \cdot w = 0}$ $(v \perp w)$.

Dimostrazione:

Sia $v \in V_{d_1}$ cioè $\boxed{Av \overset{1}{=} d_1 v}$

$w \in V_{d_2}$ cioè $\boxed{Aw \overset{2}{=} d_2 w}$

dimostriamo che $v \cdot w = 0$

$\boxed{v^t w = 0}$

nel caso in cui $d_1 \neq d_2$

$$\boxed{v^t A w} = \begin{cases} (v^t A)\, w = (v^t A^t) w = (Av)^t w \overset{1}{=} \underline{d_1 v^t w} \\ v^t (Aw) \overset{2}{=} v^t (d_2 w) = \underline{d_2 v^t w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d_1 (v^t w) = d_2 (v^t w) \qquad d_1 - d_2 \neq 0$$

$$d_1 (v^t w) - d_2 (v^t w) = 0 \qquad \underbrace{(d_1 - d_2)}_{\neq 0} v^t w = 0 \Rightarrow \boxed{v^t w = 0} \quad \square$$

Esempio:

Data $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ determinare $K \in O_3(\mathbb{R})$ con $\det(K) = 1$ tale che $K^t M K = D$ con D una matrice diagonale.

Svolgimento:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$P_M(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 1 & 0 \\ 1 & -2-x & 1 \\ 0 & 1 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x) \det \begin{pmatrix} -2-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

$$(-2-x)(-1-x) - 1$$
$$+ (x+2)(x+1) - 1$$

$$= (-1-x)(x^2+3x+2-1) - (-1-x) =$$

$$= (-1-x)(x^2+3x+\cancel{1}\cancel{-1}) = (-1-x)(x^2+3x) = -(x+1)(x+3)x$$

$$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ$$

$d_1 = -1 \qquad m_a(-1) = 1 = m_g(-1)$

$d_2 = -3 \qquad m_a(-3) = 1 = m_g(-3)$

$d_3 = 0 \qquad m_a(0) = 1 = m_g(0)$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K = (u_1 \; u_2 \; u_3)$ con u_1, u_2, u_3 base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ autovettori

$V_{-1} = \langle u_1 \rangle \qquad V_{-3} = \langle u_2 \rangle \qquad V_0 = \langle u_3 \rangle$

$$V_{-1} = \mathrm{Ker}(M + I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - \cancel{y} + z = 0 \\ \cancel{y = 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

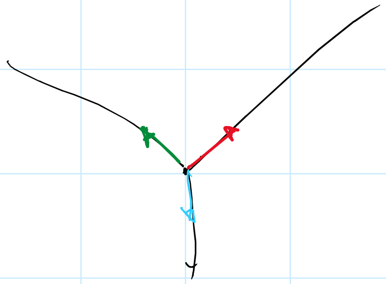
$V_{-1} = \langle u_1 \rangle \qquad \|u_1\| = 1 \qquad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$V_{-3} = \mathrm{Ker}(M + 3\mathbb{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - z = 2z - z = z \\ y = -2z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



$v_1, v_2 \qquad$ G-S

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad w_2 = v_2 - \underbrace{\left(\frac{v_2 \cdot v_1}{\|v_1\|}\right)}_{=0} u_1 = v_2$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$V_0 = \mathrm{Ker}(M - 0\mathbb{I}_3) = \mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad y - 2y + y = 0$

$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \qquad V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \det K = 1$

Verifichiamo se $\det K = 1$ in questo caso è vero quindi questa K verifica le richieste. Altrimenti basta cambiare il segno all'ultima colonna.

Domanda: enunciare e dimostrare il teorema spettrale.

Teorema spettrale:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\quad A \sim_{ort} D$ con D diagonale $\Longleftrightarrow$ $A = A^t$.

Dimostrazione:

"$\Longrightarrow$" se $A \sim_{ort} D$ abbiamo dimostrato che $A = A^t$.

"$\Longleftarrow$" Supponiamo $A = A^t$ e dimostriamo che $A \sim_{ort} D$ con D diagonale per induzione su $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$n = 1$ $\quad A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\quad A = (a)$ $\quad A \sim_{ort} A = D$ diagonale.

Per ipotesi induttiva supponiamo che ogni matrice simmetrica $M_n(\mathbb{R})$ sia ortog. diagonaliz. e dimostriamo il teorema per $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ con $A = A^t$.

Sappiamo che A ha tutti autovalori reali, sia $d \in \mathbb{R}$ un autovalore di A e $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ $v \neq \vec{0}$ un suo autovettore (cioè $Av = dv$).

$u_1 = \frac{v}{\|v\|}$ e completiamo a base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$ $B = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$

$A \sim_{ort} A'$ con $A' = H^t A H$ $\quad H = T_B^{\mathcal{E}_{n+1}}$

$$A' = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad A' = A'^t$$

$M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $M = M^t$

per ipotesi induttiva $\exists K \in O_n(\mathbb{R})$ tale che $M \sim_{ort} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} = E$

$$\boxed{K^t M K = E}$$

$$\boxed{A' \sim_{ort} D} = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} d & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & E & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \Rightarrow A \sim_{ort} D$$

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$ è ortogonale perché $$L^t L = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^t & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^t K & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \mathbb{I}_{n+1}$$

$$L^t A' L = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^t & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} d & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} d & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^t M K & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} d & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & d_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{array}\right) \quad \square.$$

Esercizio:

$f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo $f_a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1) Per quali $a \in \mathbb{R}$ f_a è iniettiva? Determinare $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f_a}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f_a}$.
f_a è suriettiva?
f_a è biiettiva?

1) Svolg: f_a è iniettiva $\Longleftrightarrow$ è suriettiva $\Longleftrightarrow$ è biiettiva $\Longleftrightarrow$ $\det M_a \neq 0$

$$\det M_a = a \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a(-2a-1) - a =$$

$$= -2a^2 - a - a = -2a^2 - 2a = -2a(a+1)$$

$\det M_a = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ oppure $a = -1$

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ f_a è iniettiva, suriettiva, biiettiva
$\Downarrow$ $\Downarrow$
$\mathrm{Ker} f_a = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im} f_a = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f_a} = \emptyset$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f_a} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\boxed{\text{Se } a=0 \quad f_0 \text{ non è suz. non è iniettiva non è biiettiva.}}$

$$M_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f_0 \quad \begin{cases} y=0 \\ x-2y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \\ z=-x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} f_0=\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Ker} f_0}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}} \qquad \operatorname{Im} f_0=\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Im} f_0}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=M_a$$

$$\text{Se } a=-1 \qquad M_{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f_{-1} \quad \begin{cases} -x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y=z \\ y=z \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} f_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Ker} f_{-1}}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}} \qquad \operatorname{Im} f_{-1}=\left\langle\overset{v_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}},\overset{v_2}{\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}},\overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

non è iniettiva

$$v_1+v_2+v_3=\vec{0} \qquad v_2=-v_1-v_3$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Im} f_{-1}}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{non è sur. non è biiettiva}}$$

2) Determinare i valori di $a\in\mathbb{R}$ tali che M_a sia diagonalizzabile

$M_a=M_a^t$ per il Teorema spettrale è **Sempre** diagonalizzabile.

$$M_a=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

3) Calcolare $f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 1+2a & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -2a(a+1) & 2+2a \end{array}\right)$$

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$ $\quad rg A = rg A|b = 3$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y+az=-1 \\ -\cancel{2}a\cancel{(a+1)}z = \cancel{2}\cancel{(a+1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y-z = \frac{1}{a} \\ y = -1-az = -1+1=0 \\ z = -\frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Se } a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\} \quad f_a^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1/a\\0\\-1/a\end{pmatrix}\right\}}$$

Se $a=0$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ $\quad rg A = 2 \neq rg(A|b) = 3 \Rightarrow \boxed{f_0^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = \emptyset}$

Se $a=-1$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-z=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=2y-z = 2z-2-z \\ y=z-1 \end{cases}$

$$\left\{\begin{pmatrix}z-2\\z-1\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\} = \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\bar{v}} + \underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{\mathrm{Ker} f_{-1}} = f_{-1}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$