

04/12/2025

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = f(x) \quad (*)$$

Equazione differenziale lineare di secondo ordine
(non-omogenea se $f(x) \neq 0$)

Soluzione generale : (1) Trovare soluzione generale di
 $(**) a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0$
(equazione omogenea associata)

(2) Trovare una soluzione particolare di $(*)$

(3) Soluzione generale di $(*)$:

Soluzione generale di $(**)$ + soluzione particolare trovata in (2).

Oggi : Concentriamoci sulla risoluzione di equazioni del tipo

$$(*) y' + a(x) y = f(x)$$

Sappiamo già risolvere l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x) y = 0.$$

$$\leadsto y = k e^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$A(x) = \int a(x) dx$$

Per procedere nel calcolo della soluzione generale di
 $(*)$ bisogna trovare una soluzione particolare

di (*) ; per questo usiamo il metodo chiamato "Variazione della Costante". Vado allora a cercare una soluzione di (*) che sia della forma

$$y(x) = k(x) e^{-A(x)}$$

Allora in modo a che questa funzione sia veramente soluzione, dobbiamo avere

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}\text{Abbiamo } y'(x) &= k'(x) e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)} \cdot (-A(x))' \\ &= e^{-A(x)} (k'(x) - k(x) A'(x)) \\ &= e^{-A(x)} (k'(x) - k(x) a(x))\end{aligned}$$

Quindi, sostituendo nell'equazione otteniamo

$$e^{-A(x)} (k'(x) - k(x) a(x)) + a(x) k(x) e^{-A(x)} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{-A(x)} \left(\cancel{k'(x)} - \cancel{k(x) a(x)} + \cancel{a(x) k(x)} \right) = f(x)$$

$$\Rightarrow e^{-A(x)} k'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow k'(x) = f(x) \cdot e^{A(x)}$$

Allora prendiamo $k(x) = \int f(x) e^{A(x)} dx$,
la funzione $y(x) = k(x) \cdot e^{-A(x)}$ è soluzione di (*)

Conclusione Data un'equazione differenziale lineare di primo ordine non-omogenea,

$$y' + a(x)y = f(x)$$

abbiamo una soluzione particolare del tipo

$$y(x) = \left(\int f(x) e^{A(x)} dx \right) e^{-A(x)}$$

e quindi la soluzione generale ^{$k(x)$} di $y' + a(x)y = f(x)$ è:

$$y(x) = k e^{-A(x)} + \left(\int f(x) e^{A(x)} dx \right) e^{-A(x)}$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(k + \int f(x) e^{A(x)} dx \right), k \in \mathbb{R}$$

Esempio: Calcoliamo tutte le soluzioni di

$$y'(x) + \frac{2y(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Dalla lezione scorsa otteniamo che le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = \frac{k}{x^2}$
 $k \in \mathbb{R}$.

Adesso calcoliamo una soluzione particolare usando il metodo della variazione della costante.

Ricordiamo che $A(x) = 2 \ln |x| = \ln(x^2)$

Bisogna calcolare
$$\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\ln(x^2)} dx = \int \frac{x^2}{x^2} dx$$
$$= \int 1 dx = x + C$$

Prendo soluzione particolare

$$y(x) = x e^{-\ln(x^2)} = x \cdot \frac{1}{e^{\ln(x^2)}} \\ = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{k+x}{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio: Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' - x y = 2x$$

① Equazione omogenea associata:

$$y' - x y = 0$$

$$A(x) = \int -x dx = -\frac{1}{2} x^2 + c$$

$$y(x) = k e^{-A(x)} \\ = k e^{-(-\frac{1}{2} x^2)} \\ = k e^{x^2/2}$$

② Soluzione particolare:

$$\begin{aligned} k(x) &= \int 2x \cdot e^{-x^2/2} dx = \int -2 e^t dt \\ t &= -\frac{x^2}{2} \\ dt &= -x dx \\ -dt &= x dx \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= -2 e^t \\ &= -2 e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } y(x) = -2 e^{-x^2/2} \cdot e^{x^2/2} = -2$$

③ Soluzione generale:

$$y(x) = -2 + k e^{x^2/2}$$

Esempio: Si determini la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \sin(x) y = 2 \sin(x) \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases}$$

① Soluzione dell'equazione omogenea:

$$y' + \sin(x) y = 0$$

$$A(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\text{Soluzione generale: } y(x) = k e^{\cos(x)}, k \in \mathbb{R}$$

② Soluzione particolare

$$\int 2 \sin(x) e^{-\cos(x)} dx = 2 e^{-\cos(x)}$$

$$y(x) = 2 e^{-\cos(x)} \cdot e^{\cos(x)} = 2$$

③ Soluzione generale:

$$y(x) = 2 + k e^{\cos(x)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

④ Verifica della condizione iniziale, trovando un valore per k

$$3 = y(\pi/2) = 2 + k e^{\cos(\pi/2)} = 2 + k e^0 = 2 + k$$

$$\leadsto k = 1$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2 + e^{\cos(x)}$.

Equazioni lineari di secondo ordine a coefficienti costanti

Risolveremo equazioni del tipo

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

(Se $a=0$, abbiamo un'equazione di primo ordine)

Partiamo dalla risoluzione dell'equazione omogenea

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

Andiamo a cercare soluzioni esponenziali del tipo $y(x) = e^{rx}$ per un certo numero r .

$$y'(x) = r e^{rx}$$

$$y''(x) = r^2 e^{rx}$$

Sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$a(r^2 e^{rx}) + b(r e^{rx}) + c e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} (ar^2 + br + c) = 0$$

$$e^{rx} > 0 \quad \forall x$$

"per ogni x "

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Conclusione: Per avere $y(x) = e^{rx}$ soluzione

dell'equazione, dobbiamo avere che r è soluzione dell'equazione $at^2 + bt + c = 0$

Quindi, per trovare soluzioni del tipo e^{rx} devo soltanto calcolare radici del polinomio

$at^2 + bt + c$
cioè soluzioni di $at^2 + bt + c = 0$

↳ equazione caratteristica
dell'equazione differenziale

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

~> ci possono essere due soluzioni reali
se $b^2 - 4ac > 0$

se $b^2 - 4ac = 0$ una sola soluzione reale

se $b^2 - 4ac < 0$ due soluzioni complesse (non-reali)

Faremo quindi una revisione dei numeri complessi!