

01/12/2025

Equazione differenziale: espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0$$

dove l'incognita è $y(x)$.

Problema di Cauchy: equazione differenziale

+

Condizioni iniziali del tipo

$$y(a) = b, \quad y'(a) = c, \quad \dots$$

Abbiamo imparato a risolvere: Equazioni Separabili,

Cioè $y' = f(x) \cdot g(y)$

OGGI: Discutiamo i tipi di equazioni differenziali che
impareremo a risolvere e cominceremo con uno di
loro.

In questo corso guarderemo, oltre alle equazioni separabili,
equazioni differenziali lineari, cioè equazioni del
tipo

$$\dots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x) = 0$$

dove $f, a_1, a_2, \dots$ sono funzioni di una variabile x
che non dipende da y .

L'ordine di una tale equazione differenziale è
l'ultimo intero i per cui $a_i(x) \neq 0$, cioè, è l'ordine

della derivata di ordine maggiore che compare nell'equazione.

Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea;

Se $f(x) \neq 0$, l'equazione si dice non-omogenea.

In questo corso risolveremo:

- 1) Equazioni lineari di primo ordine $\begin{cases} \text{omogenee} \\ \text{non-omogenee} \end{cases}$
- 2) " " " " secondo ordine $\begin{cases} \text{"} \\ \text{"} \end{cases}$

Equazioni lineari di primo ordine omogenee

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

Since $a_1(x) \neq 0$, posso dividere tutta l'equazione per $a_1(x)$ e ottengo un'equazione equivalente

$$y' + \boxed{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}} y = 0$$

→ Chiamo questa funzione $a(x)$,

Ciò è una equazione lineare di primo ordine omogenea può sempre essere scritta nella forma $y' + a(x) y = 0$

Adesso osserviamo che questa equazione è separabile! Infatti

$$y' = -a(x)y \rightarrow y=0 \text{ è soluzione;}$$

quindi Supponiamo $y \neq 0$.

$\leadsto$ divido per y

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

$\frac{y'}{y}$ dipende solo da y $a(x)$ dipende solo da x

separabile!

$$\leadsto \int \frac{y'}{y} dx = \int -a(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int a(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \ln |y| = - \underbrace{\int a(x) dx}_{A(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-A(x)+c} = e^{-A(x)} \cdot \underbrace{e^c}_{\text{costante positiva qualunque}}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^c e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{k}_{\substack{\hookrightarrow \text{qualsunque } k \in \mathbb{R} \text{ non-} \\ \text{nullo.}}} e^{-A(x)}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione

$$y' + a(x)y = 0 \quad \text{è}$$

$$y(x) = k \cdot e^{-A(x)} \quad \text{dove } A(x) = \int a(x) dx$$

per k un qualunque numero reale (in modo da includere anche la soluzione $y=0$)

Esempio: $y' + \frac{2y}{x} = 0$

$$A(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C$$

La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = k e^{-2 \ln|x|} = k \left(e^{\ln|x|} \right)^{-2}$$

$$= k |x|^{-2}$$

$$= \frac{k}{|x|^2} = \frac{k}{x^2}$$

Come risolvere equazioni lineari non-omogenee?

Proposizione Data un'equazione differenziale del tipo
 $(*) a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x) = 0$,
 l'insieme S di tutte le sue soluzioni è della forma

$$S = \left\{ g(x) + h(x) : \begin{array}{l} g(x) \text{ è soluzione dell'equazione} \\ \text{omogenea } a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ h(x) \text{ è una soluzione dell'equazione} \\ \text{non-omogenea} \end{array} \right\}$$

Dimostrazione: Supponiamo che $h(x)$ è una soluzione dell'equazione. Per dimostrare l'uguaglianza di insiemi affermata dobbiamo dimostrare che

$$S \subseteq \{ \text{---} \} \quad \text{"contenuto in"}$$

$$\{ \text{---} \} \subseteq S$$

comincio dimostrando che qualunque somma $g(x) + h(x)$ con $g(x)$ soluzione dell'equazione omogenea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ è una soluzione di $(*)$.

Sostituisco $y(x)$ in $(*)$ per $g(x) + h(x)$

$$a_2(x) \cdot (g(x) + h(x))'' + a_1(x) (g(x) + h(x))' + a_0(x) (g(x) + h(x))$$

$$+ f(x) = 0$$

$$\Rightarrow a_2(x) (g''(x) + h''(x)) + a_1(x) (g'(x) + h'(x)) + a_0(x) (g(x) + h(x)) + f(x) = 0$$

$$\Rightarrow a_2(x) g''(x) + a_2(x) h''(x) + a_1(x) g'(x) + a_1(x) h'(x) + a_0(x) g(x) + a_0(x) h(x) + f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a_2(x) g''(x) + a_1(x) g'(x) + a_0(x) g(x) \right) + \left(a_2(x) h''(x) + a_1(x) h'(x) + a_0(x) h(x) + f(x) \right) = 0$$

$= 0$ perchè $h(x)$ è soluzione dell'equazione non-omogenea.

$= 0$ perchè $g(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea.

Quindi $g(x) + h(x)$ è una soluzione di $(*)$, cioè è un elemento di S .

Adesso bisogna verificare che tutte le soluzioni, cioè tutti gli elementi di S , sono di questo tipo. Per vedere questo prendo una soluzione qualunque di $(*)$, diciamo $l(x)$, e voglio vedere che esiste una $g(x)$ soluzione dell'eq. omogenea tale che $l(x) = h(x) + g(x)$.

Per tale basta verificare che $l(x) - h(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea.

$$a_2(x) (l(x) - h(x))'' + a_1(x) (l(x) - h(x))' + a_0(x) (l(x) - h(x)) = 0$$

$$\Rightarrow a_2(x) l''(x) - a_2(x) h''(x) + a_1(x) l'(x) - a_1(x) h'(x) + a_0(x) l(x) - a_0(x) h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a_2(x) l''(x) + a_1(x) l'(x) + a_0(x) l(x) \right) - \left(a_2(x) h''(x) + a_1(x) h'(x) + a_0(x) h(x) \right) = 0$$

Siccome $l(x)$ è soluzione di (*)

$$a_2(x) l''(x) + a_1(x) l'(x) + a_0(x) l(x) + f(x) = 0$$

Siccome $h(x)$ è soluzione di (*)

$$a_2(x) h''(x) + a_1(x) h'(x) + a_0(x) h(x) + f(x) = 0$$

$$\Rightarrow (-f(x)) - (-f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Quindi } l(x) = h(x) + \underbrace{(l(x) - h(x))}_{g(x)}$$

$g(x)$
soluzione dell'eq.
omogenea.

