Esercizi da temi d'esame - soluzioni su repository

Esercizio 1

Utilizzando `gurobipy`, si implementi il seguente modello di programmazione lineare intera, relativo ad un problema di produzione:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} P_i\, x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} A_{ij}\, x_i \;\le\; B_j, && \forall j \in J && (1)\\
& \sum_{i \in I} \big(C_i\, x_i + F_i\, y_i\big) \;\le\; W && && (2)\\
& x_i \;\le\; M\, y_i && \forall i \in I && (3)\\
& x_i \in \mathbb{Z}_+,\; y_i \in \{0,1\} && \forall i \in I
\end{aligned}
$$

dove I è l'insieme dei prodotti, J è l'insieme delle materie prime. Le variabili sono: x_i la quantità di prodotti (si possono realizzare solo quantità intere), y_i binaria con valore 1 se viene realizzata almeno un'unità del prodotto corrispondente, 0 altrimenti. I dati sono: P_i il profitto unitario per il prodotto $i \in I$, B_j la quantità disponibile di materia prima $j \in J$, A_ij la quantità di materia prima j utilizzata per unità di prodotto i, C_i il costo di produzione per unità di prodotto $i \in I$, F_i il costo fisso per la produzione di prodotti $i \in I$, W il budget disponibile, M una costante sufficientemente grande (ad esempio pari a W). Si considerino, ai fini dell'implementazione, i seguenti insiemi e parametri:

- $I = \{auto, moto, bicicletta, monopattino\}$.
- $J = \{ruote, tubi, bulloni\}$.
- per i parametri P, A, B, C, F, W, M si scelgano valori a piacere.

Utilizzare le seguenti strutture dati per la definizione di insiemi e parametri:

- I, J: liste.
- P, C, F, B: dizionari {`''stringa'' : valore ...`}.
- A: dizionario {`(''stringa'',''stringa'') : valore ...`}.
- W, M: variabili (di tipo intero)

Esercizio 2

Risolvere il seguente problema utilizzando `gurobipy`. Un'azienda produce aranciata e concentrato in polvere e ha a disposizione 1 tonnellata di arance e 10 000 litri di acqua minerale. Per ogni confezione da un litro di aranciata si consumano 500 grammi di arance e 2 litri di acqua (parte in bottiglia, parte usata dal processo produttivo); per ogni confezione da un kg di concentrato si consumano 5 kg di arance e si ottengono 0,5 litri di acqua minerale disponibile per la produzione di aranciata. Il ricavo da ciascuna confezione di aranciata e di concentrato è, rispettivamente, di 80 eurocent e 2 euro, rispettivamente. Il generico modello di programmazione lineare intera per la massimizzazione dei ricavi è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} r_i \, x_i & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} \, x_i \ \leq \ b_j & & \forall j \in J \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+ & & \forall i \in I.
\end{aligned} \tag{1}
$$

dove I è l'insieme dei prodotti (aranciata e concentrato nel caso specifico), J è l'insieme delle risorse (acqua minerale e arance), x_i è la variabile che indica la quantità di prodotto i da produrre, r_i è il ricavo unitario dal prodotto i, b_j è la quantitià di risorsa j disponibile, a_{ij} è la quantità di risorsa j consumata per ogni unità di prodotto i (si noti che, per concentrato e acqua il valore di questo parametro è negativo). Utilizza le seguenti strutture dati per implementare insiemi e parametri:

- I, J: liste.
- r, b: dizionari {`‘‘stringa’’ : valore ...`}.
- A: dizionario {`(‘‘stringa’’,‘‘stringa’’) : valore ...`}.

Esercizio 3

Utilizzando `gurobipy`, si implementi il seguente modello di programmazione lineare intera. Il modello è relativo ad un problema di produzione di prodotti j su più linee i, con costi fissi f di attivazione delle linee, costi orari c per linea e prodotto, produttività oraria a per linea e prodotto, richiesta minima b per prodotto, capacità d per linea. Si dia inoltre una possibile definizione della costante M in funzione dei parametri d del problema.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\, x_{ij} \; + \; \sum_{i\in I} f_i\, y_i & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in I} a_{ij}\, x_{ij} \;\geq\; b_j & \forall j \in J & \qquad (1)\\
& \sum_{j\in J} x_{ij} \;\leq\; d_i & \forall i \in I & \qquad (2)\\
& \sum_{j\in J} x_{ij} \;\leq\; M\, y_i & \forall i \in I & \qquad (3)\\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \forall i \in I,\; j \in J & \\
& y_i \in \{0,1\} & \forall i \in I &
\end{aligned}
$$

Utilizzare i seguenti dati:

	Linea 1		**Linea 2**		**Richiesta (b)**
	Costo orario (c)	Produttività (a)	Costo orario (c)	Produttività (a)	
Auto	6	2	5	3	100
Moto	4	4	3	5	200
Bici	2	6	1	7	300
Costo fisso (f)	10		15		
Capacità (d)	800		900		

Fare uso delle le seguenti strutture dati per implementare insiemi e parametri:

- I, J: liste.
- c, a, b, f, d: dizionari {`‘‘stringa’’ : valore ...`}.
- M: variabile (di tipo intero).