Osservazione:

Se $H \in GL_n(\mathbb{R})$ $\quad \det(H) \neq 0$

1° caso: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$H = A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n, f}$ $\quad$ f è lineare biiettiva = isomorfismo

2° caso: $H = T_B^{\mathcal{E}_n}$ $\quad$ le colonne di $H = (v_1\ v_2 \dots v_n)$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$. $\quad$ H è matrice di cambio di base.

Definizione:

una matrice $K \in GL_n(\mathbb{R})$ si dice **ortogonale** se $K^{-1} = K^t$.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ K \in GL_n(\mathbb{R}) \mid K^{-1} = K^t \}$$

Osservazione:

1) $\mathbb{I}_n \in O_n(\mathbb{R})$ perché $\mathbb{I}_n^{-1} = \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n^t$

2) Se $K \in O_n(\mathbb{R})$ allora anche $K^{-1} = K^t \in O_n(\mathbb{R})$ perché K e K^t sono una l'inversa dell'altra

$$(K^t)^{-1} = K = (K^t)^t \quad \text{cioè} \quad K^t \in O_n(\mathbb{R})$$

3) Se $H, K \in O_n(\mathbb{R})$ allora anche il prodotto $HK \in O_n(\mathbb{R})$ perché $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = K^t H^t = (HK)^t$

Ricordiamo che $(AB)^t = B^t A^t$

$$\begin{array}{ccc} A & B & AB \\ 3\times\cancel{4} & \cancel{4}\times 5 & 3\times 5 \\ B^t & A^t & B^tA^t \\ 5\times\cancel{4} & \cancel{4}\times 3 & 5\times 3 \end{array}$$

$O_n(\mathbb{R})$ Gruppo ortogonale $\quad (H_1 H_2) H_3 = H_1(H_2 H_3)$

Nota bene: se $H \in O_n(\mathbb{R})$ $\quad H = (u_1 \dots u_n)$

$\mathcal{C} = \{u_1, \dots, u_n\}$ allora $\mathcal{C}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$H = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}$

$$\mathbb{I}_n = H^t H = \begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cdot u_1 & u_1\cdot u_2 & u_1\cdot u_3 \dots & u_1\cdot u_n \\ u_2\cdot u_1 & u_2\cdot u_2 & \dots & u_2\cdot u_n \\ \vdots & & & \\ u_n\cdot u_1 & & & u_n\cdot u_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_i \cdot u_j = \left.\begin{cases} 0 \text{ se } i\neq j & u_i \perp u_j \\ 1 \text{ se } i=j & \|u_i\|^2 = u_i\cdot u_i = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ è base ortonormale.}$$

ISOMETRIE

Definizione: un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **isometria** se conserva il prodotto scalare cioè:

$$\boxed{v \cdot w = f(v) \cdot f(w) \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n}$$

Proprietà delle isometrie: sia f isometria

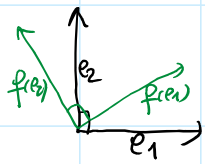
1) se $v = w$ $\quad \|v\|^2 = v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = \|f(v)\|^2 \Rightarrow \|v\| = \|f(v)\|$

Conserva le norme.

2) Se $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{f(v) \cdot f(w)}{\|f(v)\|\,\|f(w)\|} = \cos\theta'$$

angolo tra v e w $\qquad$ angolo tra $f(v)$ e $f(w)$



3) f manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Essendo $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale allora $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$$\Longrightarrow A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n, f} = \begin{pmatrix} f(e_1) \dots f(e_n) \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$$

Riassunto:

$H \in GL_n(\mathbb{R})$	$H = A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n, f}$ f isomorfismo
	$H = T_B^{\mathcal{E}_n}$ con B base di $\mathbb{R}^n$?
$K \in O_n(\mathbb{R})$	$K = A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n, g}$ g isometria
	$K = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n}$ con $\mathcal{C}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Proprietà:

1) Se $K \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow |\det(K)| = 1$

essendo $K^{-1} = K^t$ $\quad \mathbb{I}_n = K^t K$ $\qquad \det(K^t) = \det(K)$

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(K^t K) \underset{\text{Binet}}{=} \det(K)\det(K)$$

$$\Rightarrow (\det(K))^2 = 1 \Longrightarrow |\det(K)| = 1.$$

$\det(K) = \begin{cases} 1 & \text{stesso orientamento di } \mathcal{E} \\ -1 & \text{ortientamento discorde da } \mathcal{E}. \end{cases}$

2) d è autovalore per K se esiste $v \neq \vec{0}$ tale che

$Kv = dv$ cioè $\qquad f(v) = dv$

Se $K \in O_n(\mathbb{R})$ e $d \in \mathbb{R}$ è un suo autovalore reale

allora $|d| = 1$ perché f è isometria

essendo $v \neq \vec{0}$ $\quad 0 \neq \|v\| = \|f(v)\|$

$$\begin{cases} f(v) = dv \\ \|v\| = \|f(v)\| \end{cases} \quad e \quad \cancel{\|f(v)\|} = \|dv\| = |d|\,\|v\| = |d|\,\cancel{\|f(v)\|}$$

$$\Longrightarrow |d| = 1.$$

---

det(K)=1

$$K = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

è rotazione in verso antiorario di angolo θ

$$P_K(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 - 2\cos\theta\, x + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$

$$x_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$

$x_{1,2}$ sono reali $\Longleftrightarrow \cos^2\theta - 1 \geq 0$

$\Longleftrightarrow |\cos\theta| = 1$ ⟨ $\theta = 0 + 2k\pi$; $\theta = \pi + 2k\pi$

$\theta = 0 + 2k\pi$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

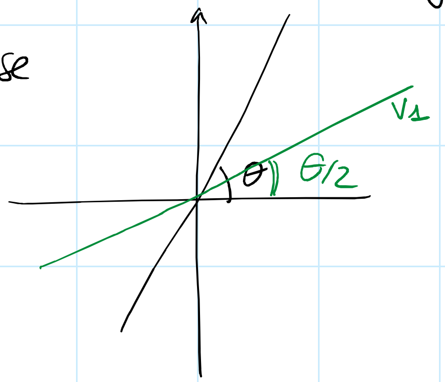
$\theta = \pi + 2k\pi$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

det(K)=-1

$$K = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

è una simmetria ortogonale di asse



$$P_K(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - x \end{pmatrix} =$$

$$= (x - \cos\theta)(x + \cos\theta) - \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= x^2 - \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

V_1 asse di simmetria

$V_{-1} = V_1^{\perp}$ direzione di simmetria

Quiz: per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A_a è ortogonale.

$$A_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a) 0
b) 1, -1
c) Nessuno
d) 2

1° metodo $A_a^t A_a = \mathbb{I}_3$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}_3}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ a^2 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \qquad a^2 = 1 \implies a = 1 \text{ oppure } a = -1$$

2° metodo: chiedere che le colonne di A_a siano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

Esempio: esistono $a, b \in \mathbb{R}$: $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ sia ortogonale?

No perché $\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5} \neq 1$

Non è mai ortogonale

Definizione: due matrici A e B in $M_n(\mathbb{R})$ si dicono **ortogonalmente simili** $A \sim_{ort} B$ se esiste una matrice ortogonale $K \in O_n(\mathbb{R})$ tale che $K^{-1}AK = K^tAK = B$.

Oss: $\sim_{ort}$ è una relazione di equivalenza.

Oss: $\sim_{ort}$ è una relazione di equivalenza.

① $A \sim_{ort} A$ $\qquad K = I_n$

② $A \sim_{ort} B$ allora $B \sim_{ort} A$ $\qquad K^t A K = B$ $\qquad K \_ K^t$

$A = K B K^t$

③ $A \sim_{ort} B$ e $B \sim_{ort} C \Longrightarrow A \sim_{ort} C$

Fatto: Se $K \in O_n(\mathbb{R})$ e $A \sim_{ort} K$ allora anche A è ortogonale.

Sugg: esiste $H \in O_n(\mathbb{R})$: $H^t A H = K$ $\qquad \underline{A = H K H^t}$

A è ortogonale $\iff A^{-1} = A^t$.

Isometrie di $\mathbb{R}^3$

dirette

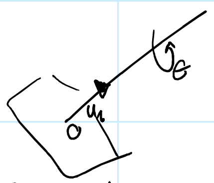
$\det(K) = 1$

Ha sempre un autovalore reale

Se $d = 1$ esiste un vettore u_1 $\|u_1\| = 1$ $\quad K u_1 = 1 \cdot u_1$

$\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ con questo cambio di base

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$



Se $d = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverse

$\det(K) = -1$

$d = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simmetria $\perp$ rispetto al un piano

$d = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Definizione: un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

si dice simmetrico se $A = A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n} f$ è simmetrica

cioè $A^t = A$ $\qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{v^t f(w)}{v^t(Aw)} = (v^t A) w = (v^t A^t) w = \underset{(Av)^t w}{\underline{(Av)^t w}}$$

$$\boxed{v \cdot f(w) = f(v) \cdot w}$$

Domanda 17:

Se $A \sim_{ort} D$ con D diagonale allora $A = A^t$.

Dim:

Esiste $K \in O_n(\mathbb{R})$: $\qquad K^t A K = D$

$$\cancel{K} \cancel{K^t} A K = K D \qquad A K = K D \Rightarrow A \cancel{K} \cancel{K^t} = K D K^t$$

cioè $A = K D K^t$ $\qquad D = D^t$ perché è diagonale

$$A^t = (K D K^t)^t = (K^t)^t D^t K^t = K D K^t = A. \quad \square$$

Def: una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **ortogonalmente diagonalizzabile** se $A \sim_{ort} D$ con D diagonale

cioè $\exists\, K \in O_n(\mathbb{R})$: $\quad K^t A K = D$.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad rg A = 1$

$p_A(x) = -x^2(x-9)$ $\quad \sim D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

0 è autovalore perché $rg A < 3$

$V_0 = Ker(A - 0 I_3) = Ker A$ $\quad \begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ \boxed{2x+y+2z=0} \\ 4x+2y+4z=0 \end{cases}$ $\quad y = -2x-2z$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x-2z \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$m_g(0) = \dim V_0 = 2$ $\quad 1 \le \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{m_g(0)} \le m_a(0) = 2$

Essendo $tr(A) = tr(D) = 9 = 0 + 0 + d \Rightarrow$

$d = 9$ $\quad m_a(9) = 1 = m_g(9)$

$$V_9 = Ker(A - 9 I_3) = Ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1^0 + 3^0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^0 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+4y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4y - z = 4y - 2y = 2y \\ z = 2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$V_9 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{V_0 : 2x + 1y + 2z = 0}$$

Osserviamo che $V_0 = V_9^\perp$. Una base di autovettori è $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$

$V_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ G-S su $\{v_1, v_2\}$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|w_2\| = \frac{\sqrt{45}}{5}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{45} \\ -2/\sqrt{45} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

$V_9 = \langle v_3 \rangle$ prendiamo $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u_1 \cdot u_3 = 0 \\ u_2 \cdot u_3 = 0 \end{matrix} \text{ perché } V_0 \perp V_9$$

$V_0 = \langle u_1, u_2 \rangle$ $\qquad$ $V_9 = \langle u_3 \rangle$

$$K = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \; u_1 \quad & \quad u_2 \quad & \quad u_3 \end{matrix} \end{array} \in O_3(\mathbb{R}) \text{ e}$$

$$K^t A K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$