

Esercizio 1 In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$.

- (a) Determinare una base ortonormale di U .
- (b) Determinare una base ortonormale di $U^\perp$.
- (c) Determinare la proiezione ortogonale su $U^\perp$ del vettore $(4, 1, 2, 1)$.
- (d) Determinare la proiezione ortogonale su $U^\perp$ del sottospazio $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Esercizio 2 Al variare di a in $\mathbb{R}$, si considerino il sottospazio $U_a = \langle (1, 0, 1), (1+a, -a, a-1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ ed il vettore $v = (2, -1, 3)$.

- (a) Per $a = 1$, calcolare la proiezione ortogonale $p_{U_1}(v)$ di v su U_1 .
- (b) Per $a = 1$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale di v su U_1 .
- (c) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la proiezione $p_{U_a}(v)$ è nulla.
- (d) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la norma della proiezione ortogonale $p_{U_a}(v)$ sia uguale a $\sqrt{13}$.

ES → In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U: 2x + y - z = 0$

- a) determinare una base ortonormale di U
- b) Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U ; determinare $\pi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

siano $p_U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $p_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e W rispettivamente

- a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare a una base ortonormale di $U + W$

- b) determinare $p_W(u)$, con $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) determinare un vettore $w \in W$ t.c. $p_U(w) = u$

d) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\|p_U(v)\| = 0$ e $\|p_W(v)\| = \sqrt{6}$

ESERCIZIO: In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, siano:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \text{ sottospazi di } \mathbb{R}^4$$

$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \qquad \qquad \qquad w$

a) per quali valori di t , U e W non sono in somma diretta

b) per $t=3$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v di norma minima tale che $w+v \in U^\perp$

c) Si determini una base ortonormale di U

ESERCIZIO

Si consideri $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di U e delle equazioni che definiscono U .

b) Sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U , determinare una base ortonormale di W .

c) Sia $\pi_W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W , determinare $\pi_W \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Sia $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W .