



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria della similitudine

Corso di Macchine 1

Agenda

- ▶ La teoria della Similitudine
- ▶ Similitudine meccanica
- ▶ Influenza del numero Reynolds
- ▶ Leggi di Affinità
- ▶ Leggi di Affinità semplificate – Note Integrative



Leggi di affinità – Esercizi

Esercizio 2

Si consideri una pompa centrifuga caratterizzata dai seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_v = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$
- Prevalenza $h = 45 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n = 1600 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb} = 15.6 \text{ kW}$
- Rendimento $\eta = 79\%$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Esercizio 2

Determinare:

1. le caratteristiche funzionali $\left(\frac{D_{2_{1200\text{ rpm}}}}{D_{2_{1600\text{ rpm}}}}, Q_{v_{1200\text{ rpm}}} \right)$ di una macchina simile che sia in grado, grazie alla variazione delle dimensioni, di
 - Fornire una prevalenza $h = 45\text{ m}$
 - Operando alla velocità di rotazione $n = 1200\text{ giri}/\text{minuto}$
2. le caratteristiche funzionali $\left(\frac{D_{2_{1200\text{ rpm}}}}{D_{2_{1600\text{ rpm}}}}, h_{1200\text{ rpm}} \right)$ di una macchina simile che sia in grado, grazie alla variazione delle dimensioni, di
 - Fornire una portata volumetrica $Q_v = 0.028\text{ m}^3/\text{s}$
 - Operando alla velocità di rotazione $n = 1200\text{ giri}/\text{minuto}$

RISOLUZIONE

$$\varphi_D = \frac{Q_V}{\omega D_2^3}$$

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D_2^2}$$

$$\Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D_2^3}$$

$$\varphi_D, \Pi_D = f(N_F, \varphi_D, Re_D)$$

TRASCURABILE IN SUO
EFFETTO perche
 $Re > 10^5 \div 10^6$
 $\rightarrow f = \text{cost}$

$$1) \left(\frac{gh}{\omega^2 D_2^2} \right)_{1600} = \left(\frac{gh}{\omega^2 D_2^2} \right)_{1200}$$

$$\omega = \Omega \cdot n$$

$$\frac{45}{1600^2 D_{2,1600}^2} = \frac{45}{1200^2 D_{2,1200}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{D_{2,1200}}{D_{2,1600}} = 1,33$$

$$\left(\frac{Q_V}{\omega D_2^3} \right)_{1200} = \left(\frac{Q_V}{\omega D_2^3} \right)_{1600} \Rightarrow Q_{V,1200} = Q_{V,1600} \cdot \left(\frac{n_{1200}}{n_{1600}} \right) \left(\frac{D_{2,1200}}{D_{2,1600}} \right)^3$$

$$Q_{V,1200} = 0,028 \cdot \frac{1200}{1600} \cdot 1,33^3 = 0,0494 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$2) \left(\frac{Q_V}{\omega D_2^3} \right)_{1600} = \left(\frac{Q_V}{\omega D_2^3} \right)_{1200}$$

$$\frac{D_{2,1200}}{D_{2,1600}} = 1,1$$

$$\left(\frac{gh}{\omega^2 D_2^2} \right)_{1600} = \left(\frac{gh}{\omega^2 D_2^2} \right)_{1200}$$

$$h_{1200} = 30,63 \text{ m}$$

Esercizio 3

Si consideri una turbina idraulica denominata MODELLO (M) caratterizzata da un rapporto di scala 1:10 e avente i seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_{v_M} = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$
- Caduta nominale $h_M = 40 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n_M = 3500 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb_M} = 28.0 \text{ kW}$
- Rendimento $\eta_M = 90\%$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Determinare le caratteristiche funzionali $(Q_{v_P}, n_P, P_{alb_P})$ di una macchina simile denominata PROTOTIPO (P) sapendo che $h_M = h_P$



CALCOLARE Q_{VP}

$$Q_{V,P} \Rightarrow \varphi_D = \frac{Q_V}{\omega D^3}$$

$$h_P \Rightarrow \varphi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2}$$

$$\frac{\cancel{gh_H}}{\omega_H^2 D_H^2} = \frac{\cancel{gh_P}}{\omega_P^2 D_P^2}$$

$$h_P = h_H$$

$$m_P = \sqrt{m_H^2 \left(\frac{D_H}{D_P} \right)^2}$$

$$m_P = 350 \text{ rpm}$$

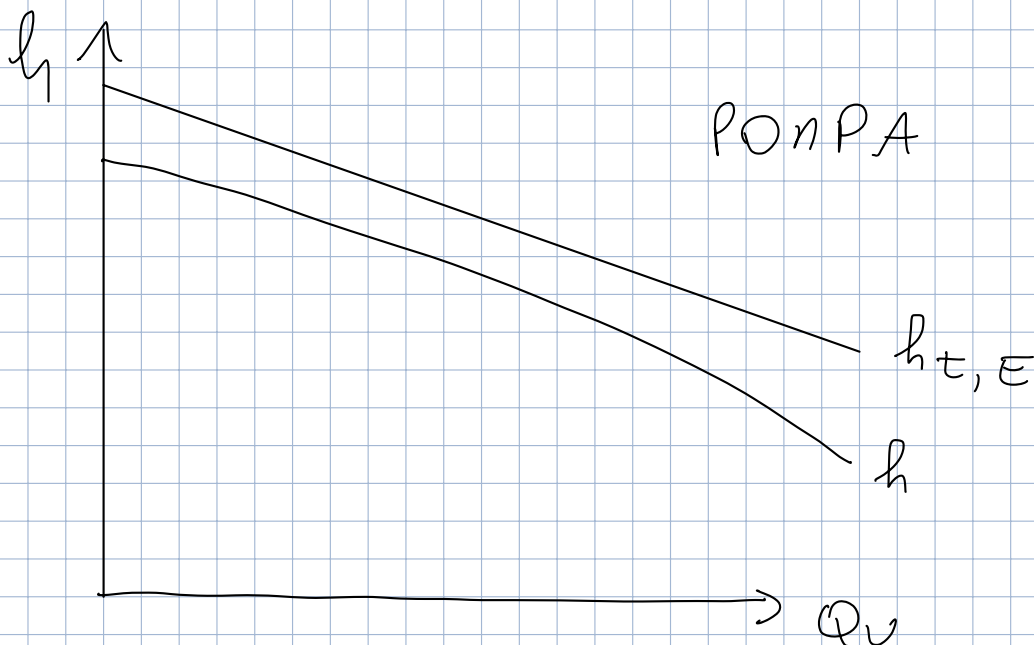
$$\frac{D_H}{D_P} = \frac{1}{10}$$

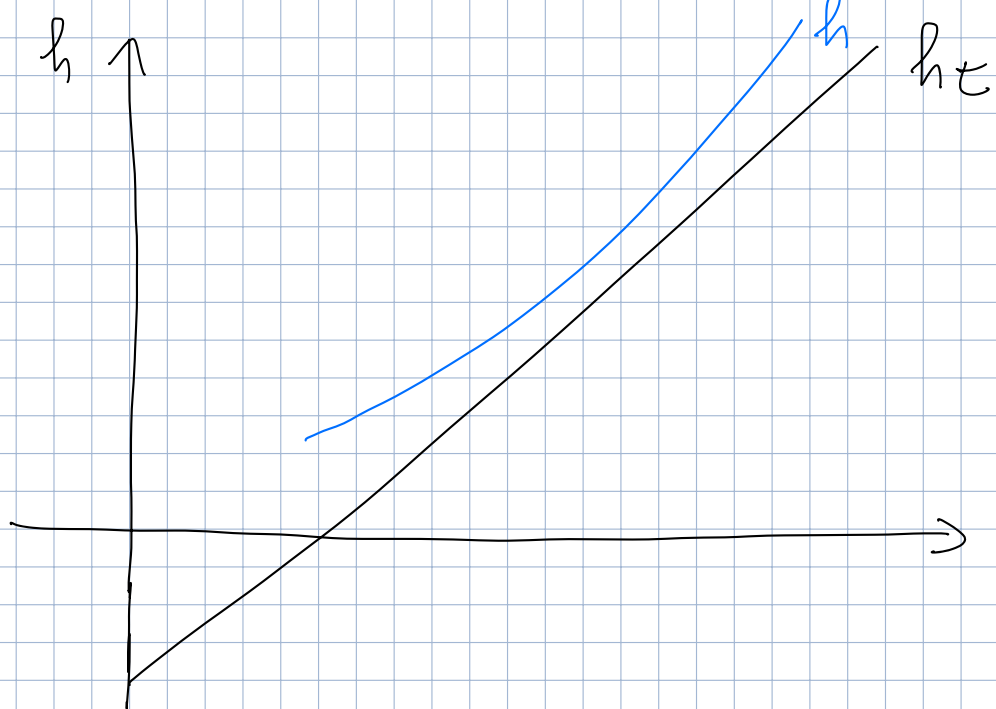
$$Q_{VP} \Rightarrow \varphi_D$$

$$\frac{Q_{V,H}}{m_H D_H^3} = \frac{Q_{VP}}{m_P D_P^3}$$

$$Q_{V,P} = 8 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$P_{\text{eltr},P} = g Q_{VP} \cdot h_P \cdot \eta_P = 2824 \text{ kW}$$







Effetto scala

Effetto scala

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re)$$

In condizioni di moto turbolento
pienamente sviluppato

- Questa relazione si basa però sull'ipotesi che la scabrezza relativa di due macchine geometricamente simili sia costante:

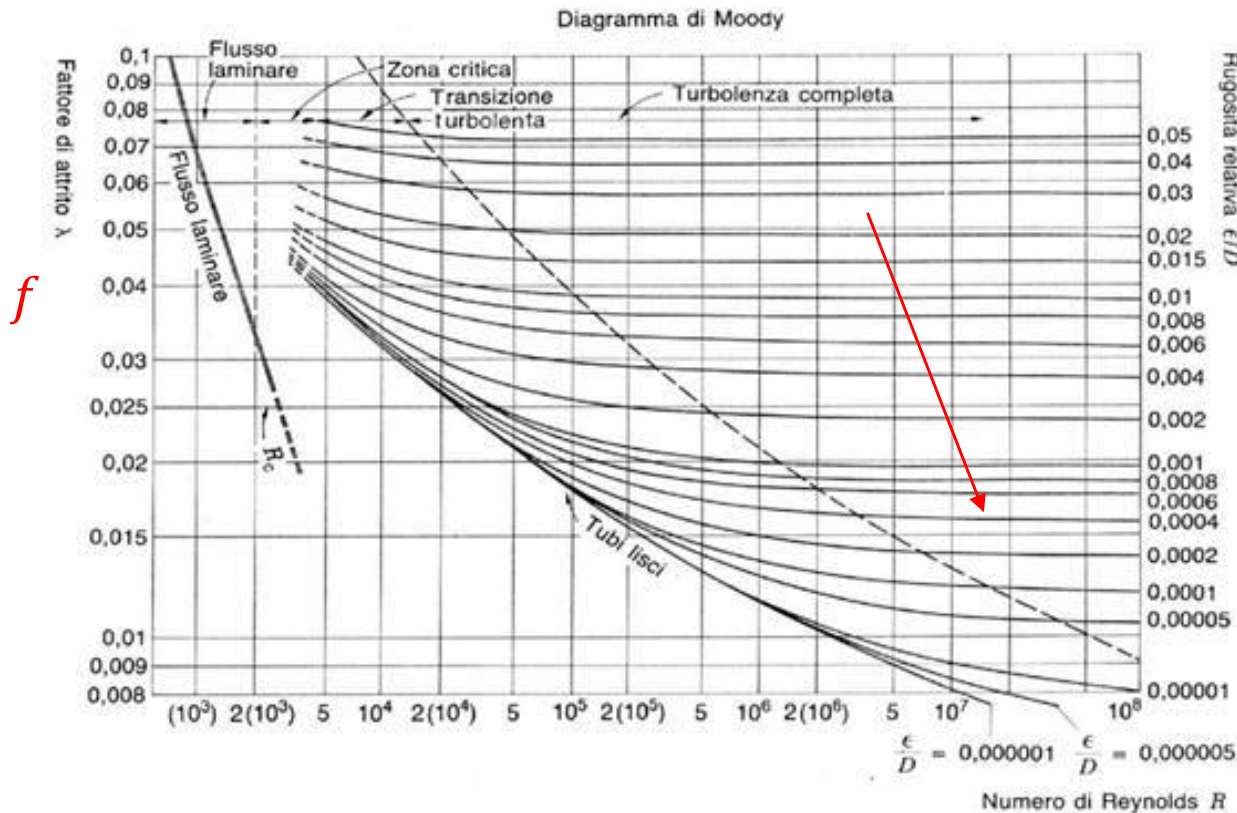
$$\frac{\epsilon}{D} = cost$$

... ma la **scabrezza assoluta** ϵ dipende dalla **lavorazione** e non varia apprezzabilmente fra modello e prototipo!!

- La **scabrezza relativa** quindi **diminuisce** all'aumentare della **taglia** delle macchine anche se è assolta la similitudine geometrica
- Quando il **rapporto di scala** tra macchine geometricamente simili è **elevato**, si ha una significativa variazione di scabrezza relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} \neq cost$$

Effetto scala



- All'aumentare della dimensione della macchina, la scabrezza relativa diminuisce

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} c^2}{\psi_t 2U_2^2}$$

- Macchine di taglia maggiore, anche se è assoluta la similitudine geometrica, mostreranno rendimenti più elevati (effetto scala)

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = f(N_f, \varphi) = cost$$

$$\Rightarrow \psi \neq cost$$

$$\eta_{id} \neq cost$$

Effetto scala

- L'effetto scala potrebbe essere inglobato nella similitudine introducendo un fattore correttivo al rendimento e quindi andando a stimare il numero di pressione corretto
- Si ipotizzi di avere due macchine A e B per le quali è verificata la similitudine geometrica e cinematica

HP: $N_{fA} = N_{fB}$ $\varphi_A = \varphi_B$



$$\psi_{tA} = \psi_{tB}$$

- Noto il rendimento idraulico di una macchina η_{idA} , tramite opportuna correlazione correttiva, si potrebbe determinare il numero di pressione di entrambe le macchine:

$$\eta_{idA}$$



$$\psi_A = \eta_{idA} \psi_{tA}$$



$$\eta_{idB}$$



$$\psi_B = \eta_{idB} \psi_{tB}$$

Correlazioni effetto scala

Table 2.1 A selection of model scale formulae (as quoted for example by Nixon (1965). Subscript m denotes 'model')

Moody (1942):
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{D_m}{D} \right)^n \quad 0 \leq n \leq 0.26$$

Moody:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{H_m}{H} \right)^{0.01} \left(\frac{D_m}{D} \right)^{0.25}$$

Anderson:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \frac{0.94 - Q^{-0.32}}{0.94 - Q_m^{-0.32}}$$

Pfleiderer:

$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.01} \left(\frac{D_m}{D} \right)^{0.25} \quad \text{valid between } 1/12 < R_{em}/R_e < 20$$

Hutton:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = 0.3 + 0.7 \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.2}$$

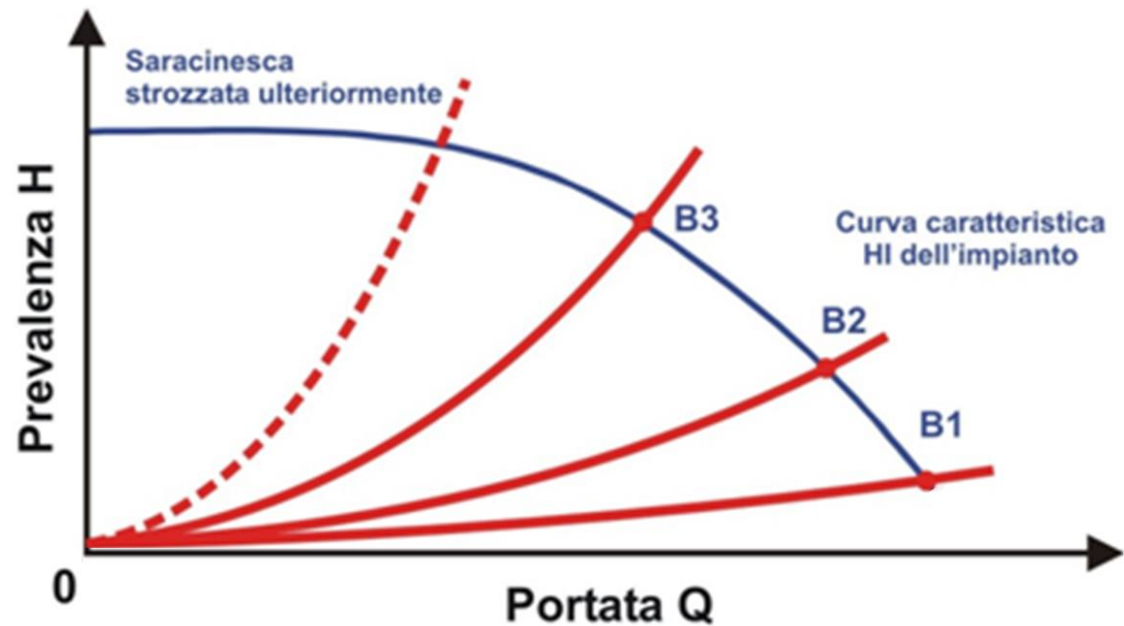
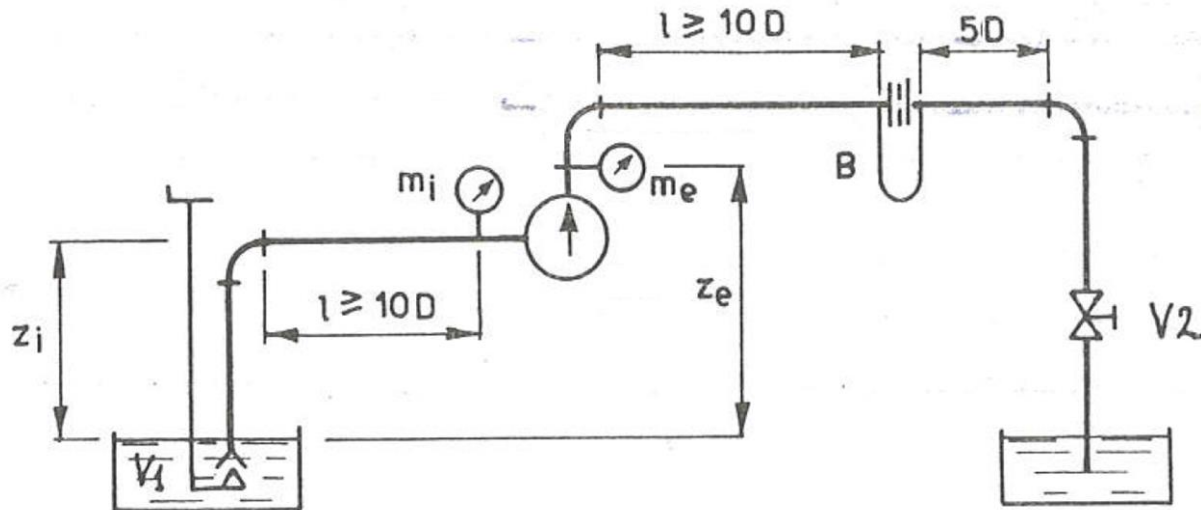
Ack ret:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = 0.5 \left[1 + \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.2} \right]$$



Regolazione della portata

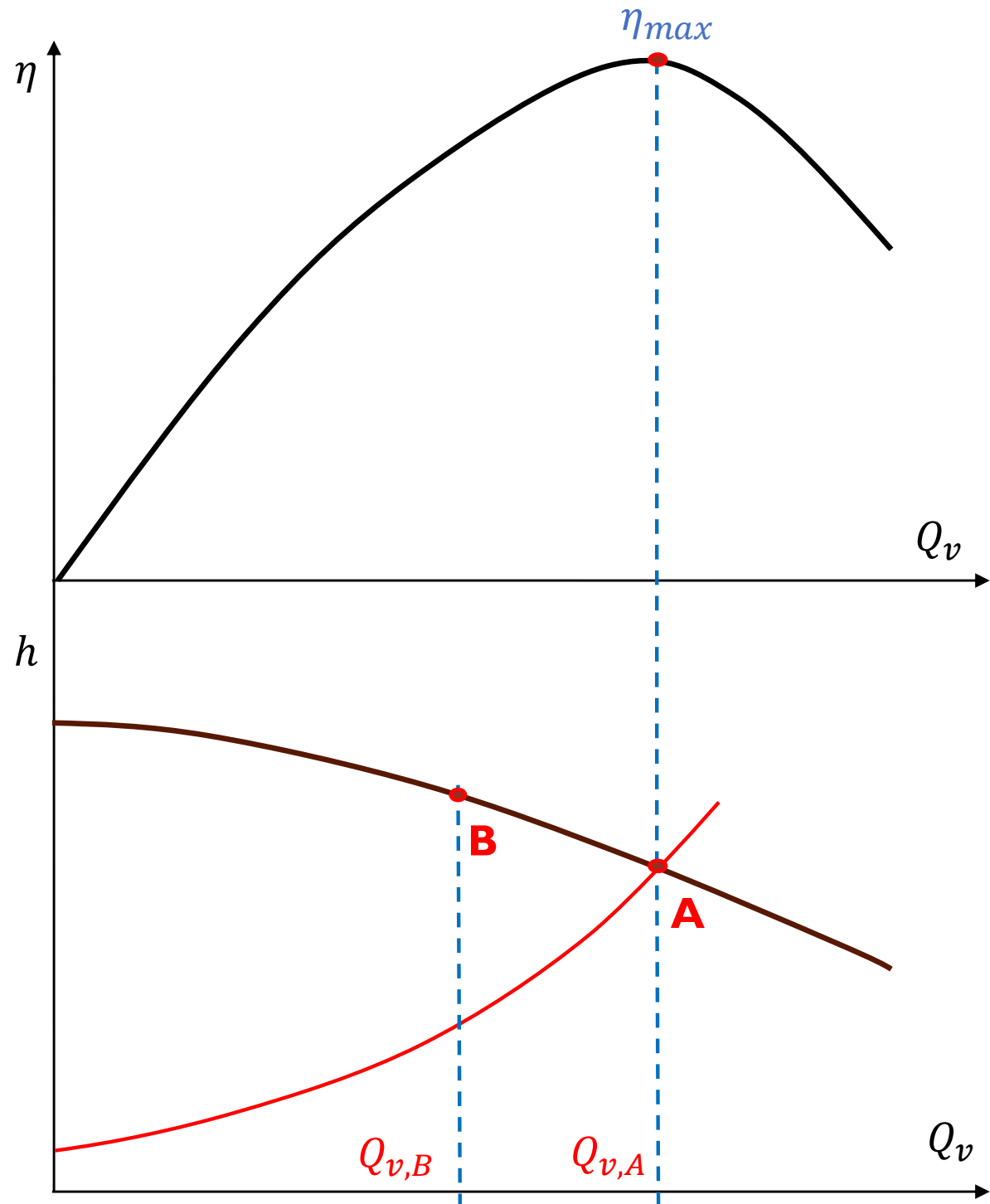
Valvola a saracinesca vs. variazione del regime di rotazione

Leggi di affinità



Modalità di regolazione

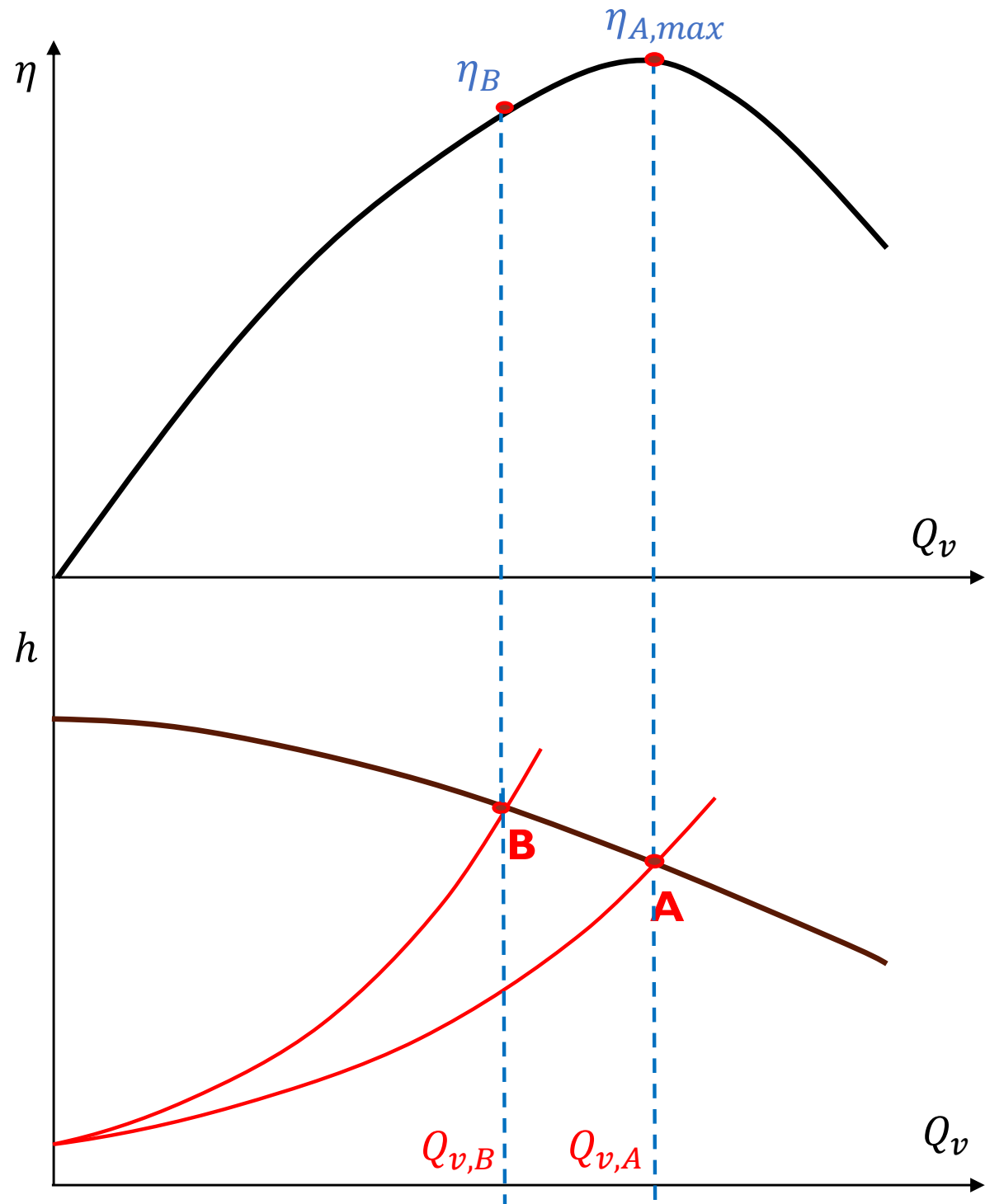
- Negli impianti di pompaggio la regolazione della portata viene di solito eseguita per il tramite di una **saracinesca** disposta nel ramo di mandata del circuito
- Le condizioni nominali di esercizio sono rappresentate dal punto **A** di intersezione della curva della prevalenza h della pompa con la caratteristica resistente h_r dell'impianto (**punto A**)
- Si supponga che sia richiesta una portata $Q_{v,B}$ inferiore a quella nominale



Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

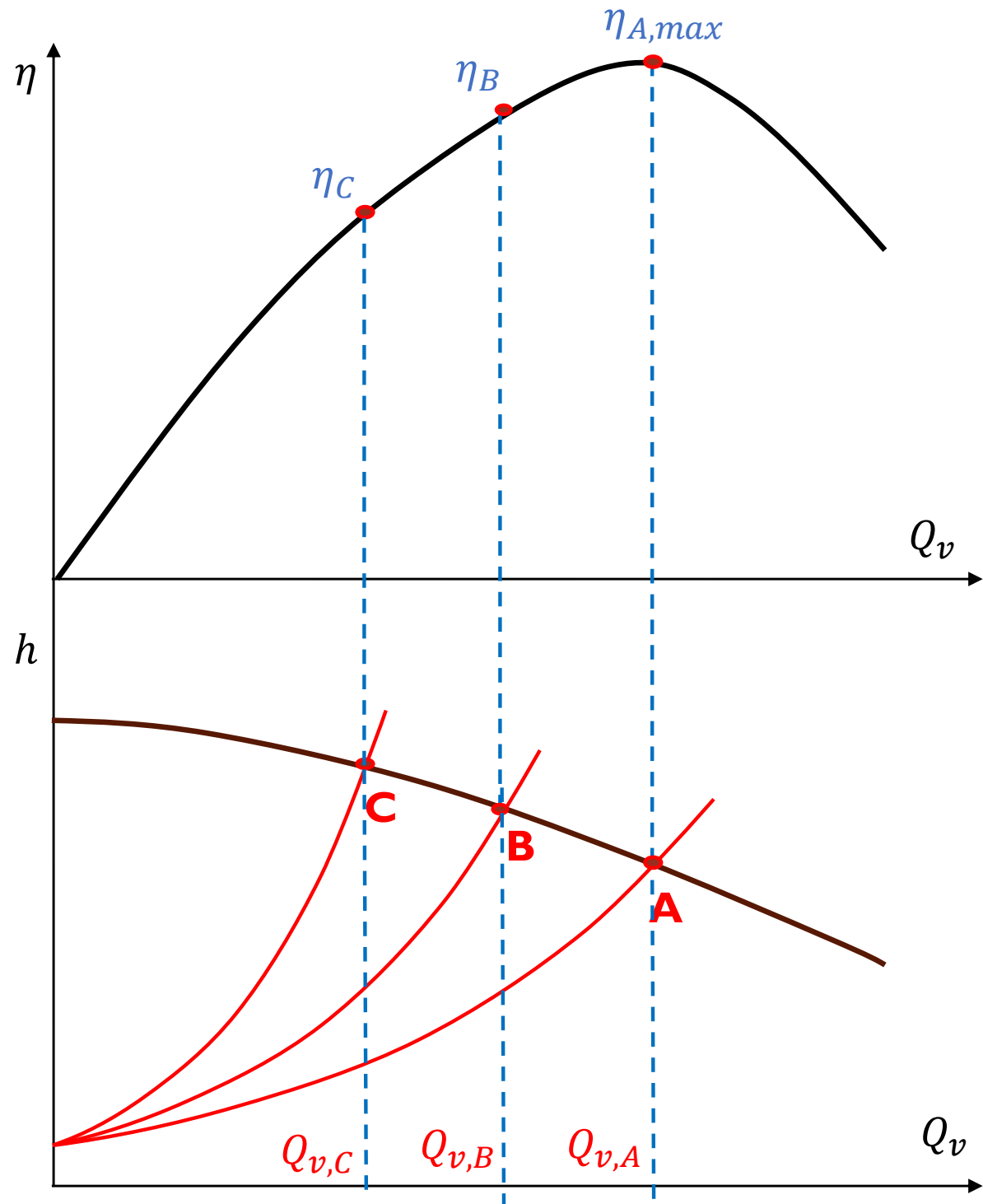
- Si chiude progressivamente la saracinesca finché la nuova caratteristica resistente h_r' dell'impianto intersecherà la prevalenza della pompa nel punto **B**
- Il rendimento della pompa si riduce rispetto alle condizioni nominali, assumendo il valore η_B



Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

- Analogamente, la portata di esercizio $Q_{v,C}$ si otterrà chiudendo ulteriormente la saracinesca finché la nuova caratteristica resistente dell'impianto intersecherà in C la curva della prevalenza h della pompa
- Il rendimento della pompa η_C subirà un'ulteriore riduzione



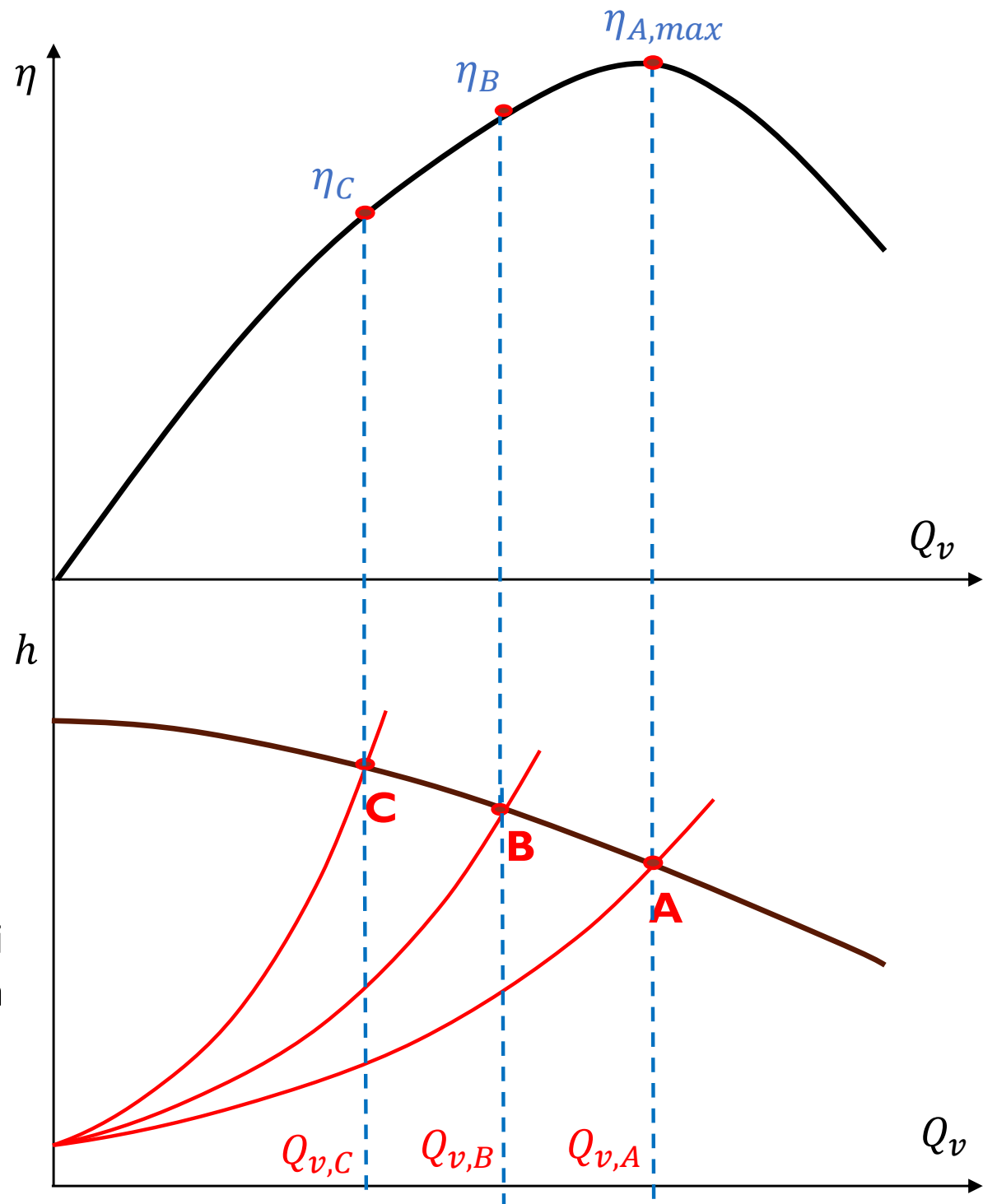
Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

- La potenza P assorbita dalla pompa è data da:

$$P = \frac{\rho Q_v g h}{\eta}$$

- L'abbassamento del η è dovuto alle perdite di laminazione introdotte a seguito della regolazione tramite saracinesca
- Per eliminare queste perdite si impiegano sistemi di regolazione a velocità di rotazione n variabile

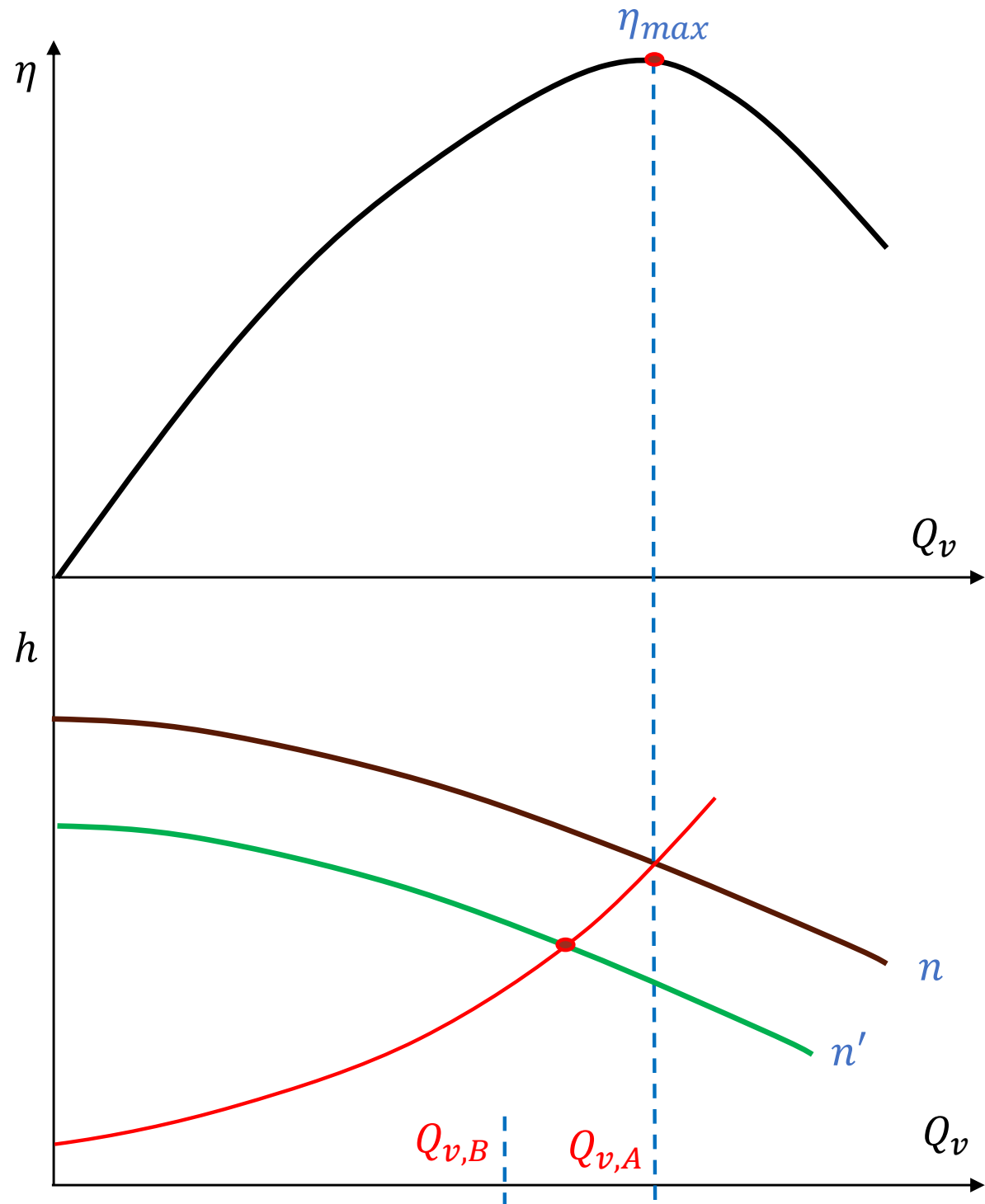


Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

(n variabile)

- Se si modifica la velocità di rotazione n di una macchina, la curva caratteristica della macchina varia
- Se, durante la modifica del regime di rotazione, il grado di apertura della valvola resta invariato, la caratteristica resistente dell'impianto **non cambia**
- Riducendo quindi il regime di rotazione, il punto di funzionamento cambia



Modalità di regolazione

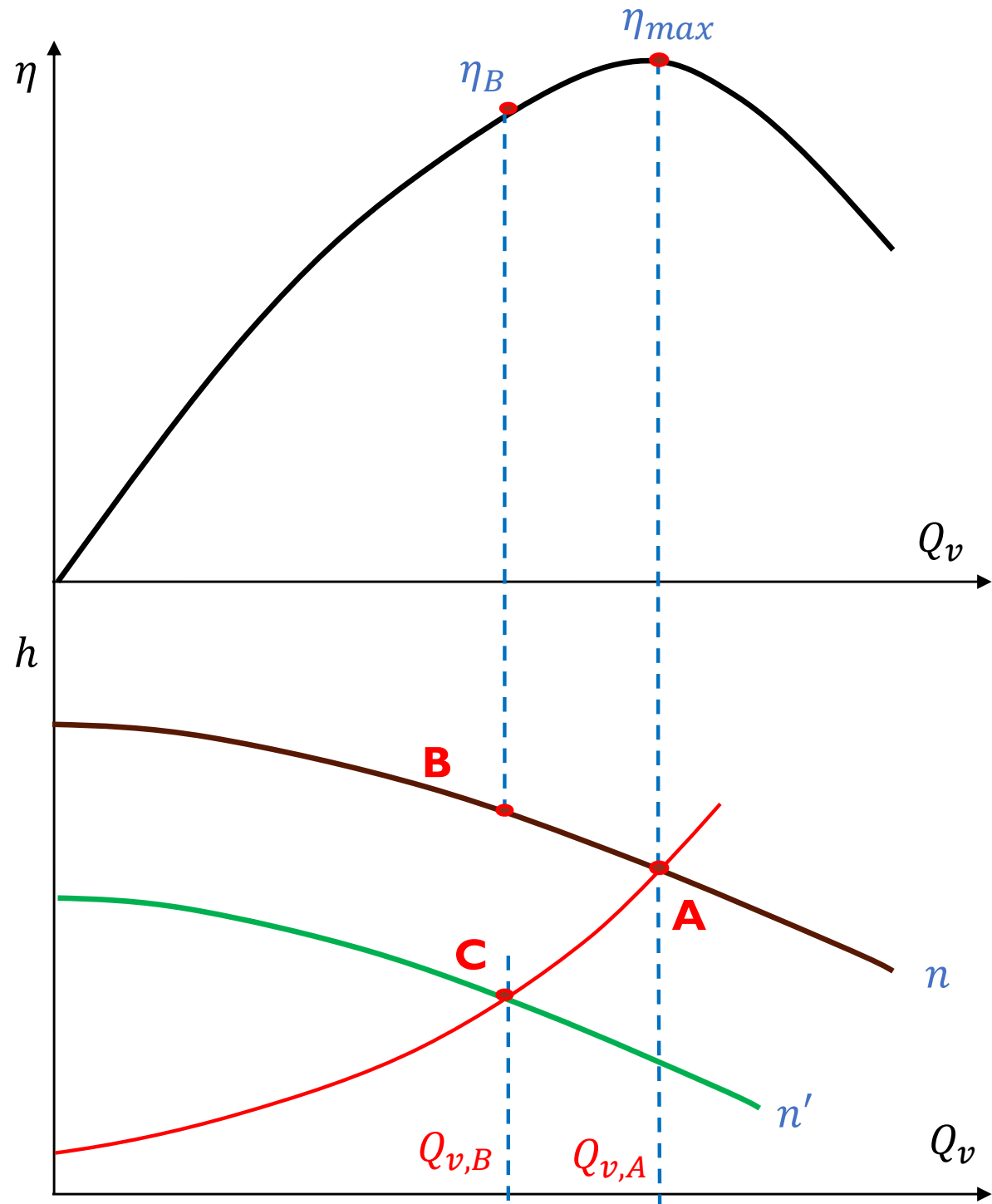
Regolazione con inverter

(n variabile)

- Si può quindi continuare a diminuire il regime di rotazione fino a raggiungere il punto di funzionamento **C** con il valore di portata desiderato $Q_{v,C} = Q_{v,B}$

Che rendimento avrà la macchina nel punto **C**? Maggiore o minore di **B**?

- In **B** il rendimento è noto
- Per determinare quello di **C** si deve trovare il punto in similitudine meccanica con **C** al regime di rotazione n



Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

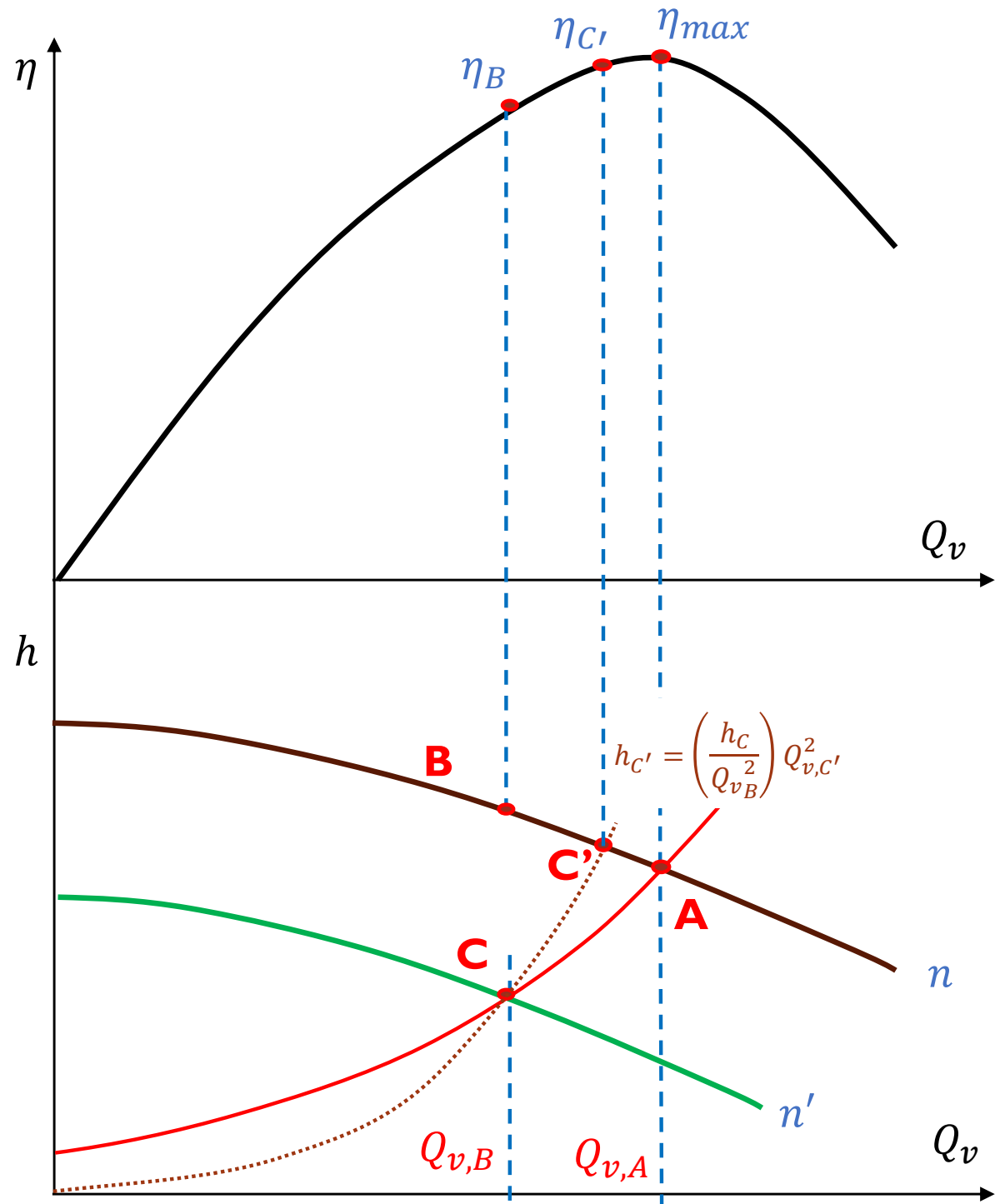
(n variabile)

- Il punto C' in similitudine meccanica si trova sfruttando la legge di affinità:

$$h_{C'} = \left(\frac{h_C}{Q_{vC}^2} \right) Q_{v,C'}^2$$

$$h_{C'} = \left(\frac{h_C}{Q_{vB}^2} \right) Q_{v,C'}^2$$

- Il punto C' avrà quindi un rendimento superiore al punto B

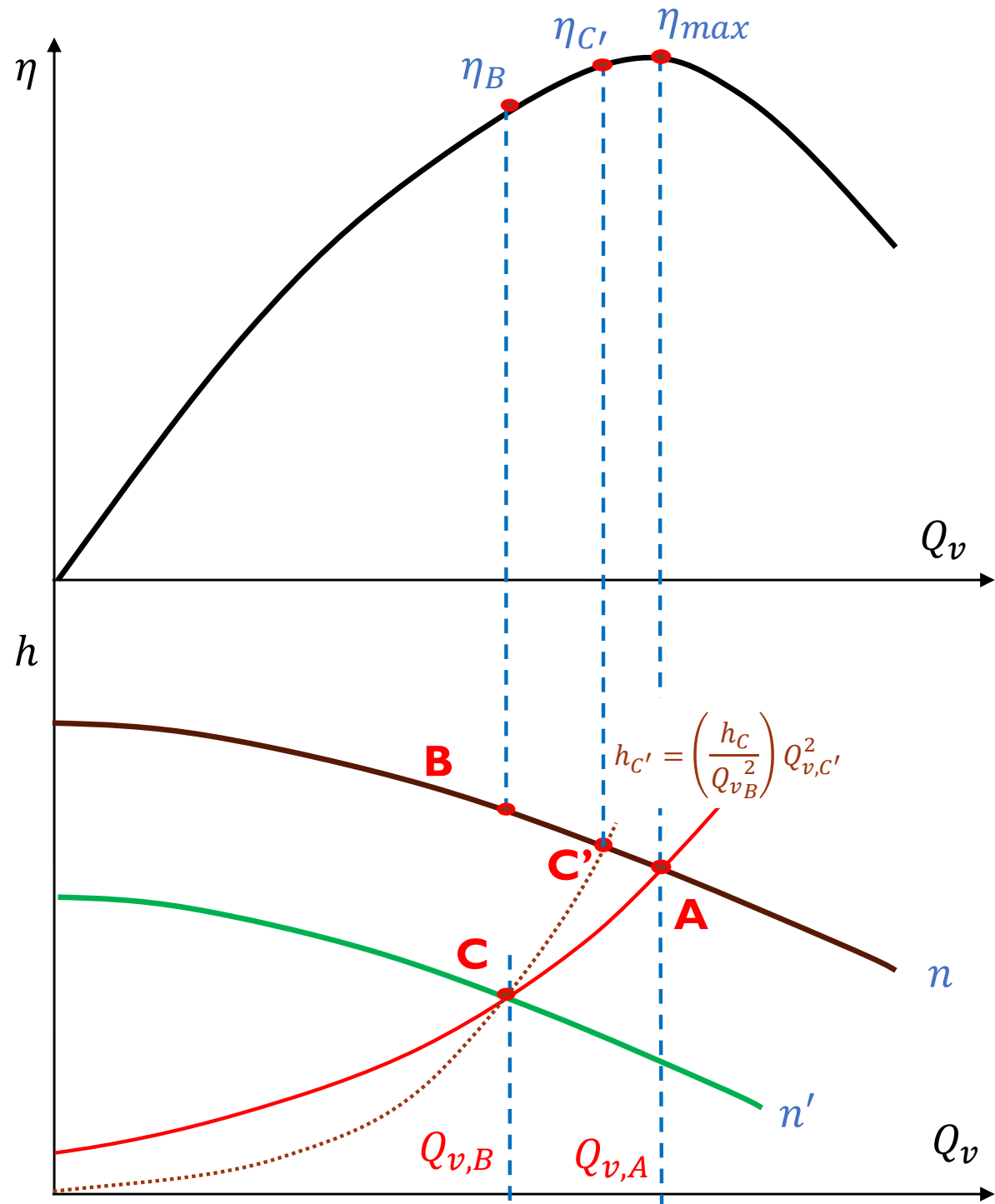


Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

(n variabile)

- L'impiego di un motore di azionamento a velocità di rotazione n variabile permette di ridurre la potenza assorbita $P = \rho Q_v g h / \eta$ da una pompa perché, per una data portata Q_v , consente di ridurre la prevalenza richiesta h e di aumentare il rendimento η
- Per contro aumentano i costi del macchinario di azionamento, circostanza che ne limita l'impiego agli impianti di elevata potenza



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

