

27/11/2025

Attenzione: e-mail $\neq$ whatsapp
e-mail formale $\neq$ e-mail informale

JORGE VITÓRIA

Ricevimento: Fissare appuntamento tramite e-mail: jorge.vitoria@unipd.it

↳ In PRESENZA (Torre Archimede, ufficio 2CD3) ufficio
↳ via ZOOM piano ↳ corridoio

CALENDARIO: ORARIO USUALE;
LUNEDÌ 11:30-13:30
MARTEDÌ 10:30-11:30
MERCOLEDÌ 11:30-13:30
GIOVEDÌ 09:30-11:30

MA LEZIONI CANCELLATE (DA RICUPERARE IN ORARIO USUALE)
MARTEDÌ 02/12
GIOVEDÌ 11/12
LUNEDÌ 22/12
MARTEDÌ 23/12

SECONDO COMPITO / PRIMO APPELLO SAM: 23/01

! FOGLI DI ESERCIZI SU MOODLE OGNI SETTIMANA

Equazione Differenziali

Equazione = uguaglianza fra due espressioni contenenti di incognite.

Soluzione di una equazione: oggetto matematico che in sostituzione delle corrispondenti incognite rende vera l'uguaglianza

Esempi: 1) $2x + 2 = 0 \rightsquigarrow$ Soluzione $x = -1$
1 incognita numerica Soluzione è unica ed è un numero
2) $xy = 1 \rightsquigarrow$ Soluzioni sono infinite.
due incognite numeriche Per esempio $(2, \frac{1}{2})$

Soluzioni sono
coppie di numeri
ordinate

$$3) \quad \underline{f'(x) = x}$$

uguaglianza fra due funzioni
la incognita qui è la funzione f .

Per risolvere questa equazione, devo integrare x

$$f(x) = \int x \, dx = \underline{\frac{x^2}{2} + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Soluzione generale,
ci sono allora infinite soluzioni.

Di solito scriviamo l'equazione sopra come

$$\boxed{y' = x}$$

↓
l'incognita è la funzione $y(x)$
→ la soluzione sarà una espressione per $y(x)$.

Definizione: Un'equazione differenziale è un'uguaglianza della forma

$$(*) \quad \underline{F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots)} = 0$$

espressione algebrica che dipende
dalla variabile x , dalla incognita $y(x)$,
e dalle sue derivate.

Una soluzione dell'equazione differenziale è una funzione $f(x)$ tale che sostituendo $y(x) = f(x)$ nell'espressione $(*)$ si ottiene un'affermazione vera.

Esempio Se un corpo di massa m si muove nello spazio sotto l'azione di una forza $\vec{F}$ (che è una funzione del tempo t , quindi $\vec{F}(t)$), Come possiamo determinare la funzione $\vec{s}(t)$ che descrive la posizione del corpo nel istante t ?

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \vec{s}''(t)$$

$$\boxed{s''(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}} \rightarrow \text{equazione differenziale.}$$

Per trovare la soluzione, basta integrare $\frac{\vec{F}(t)}{m}$ due volte.

Definizione Un'equazione differenziale si dice separabile se è della forma:

$$y' = \underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{funzione nella} \\ \text{variabile } x}} \underbrace{g(y)}_{\substack{\downarrow \\ \text{funzione nell'incognita} \\ y}}.$$

Esempio $y' = \sin(x) \cdot y^2$ è un'equazione differenziale separabile in cui
 $f(x) = \sin(x)$
e $g(y) = y^2$.

Metodo di risoluzione delle equazioni separabili:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Se $g(y) = 0$, allora ho $y' = 0$ e quindi $y(x) = c$

$(c \in \mathbb{R})$ è la soluzione generale di tale equazione.

Supponiamo allora $g(y) \neq 0$

$$\leadsto \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

abbiamo
separato tutto
ciò che dipende
dall'incognita y
da quello che
dipende soltanto
dalla variabile x

$$\leadsto \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

Ricordiamo che usando integrazione per sostituzione

se

$$\int \frac{1}{g(y)} dy \quad \underset{y=y(x)}{=} \quad \int \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) dx$$

$$\leadsto \underbrace{\int \frac{1}{g(y)} dy}_{\text{Calcolabile (variabile } y)}} = \underbrace{\int f(x) dx}_{\text{Calcolabile (variabile } x)}}$$

→ Si risolve l'equazione!

Nota :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx &= \int \frac{\frac{dy}{dx}}{g(y(x))} dx \\
 &= \int \frac{dy}{g(y(x))} \cdot \cancel{dx} \\
 &= \int \frac{1}{g(y)} dy
 \end{aligned}$$

Esempio $y' = \sin(x) \cdot y^2$

$$\leadsto \frac{y'}{y^2} = \sin(x)$$

$$\leadsto \int \frac{y'}{y^2} dx = \int \sin(x) dx$$

$$\leadsto \int \frac{1}{y^2} dy = \int \sin(x) dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto -\frac{1}{y} + c_1 = -\cos x + c_2$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto -\frac{1}{y} = -\cos x + \underbrace{C_2 - C_1}_C \quad \text{invece di}$$

$$\leadsto -\frac{1}{y} = -\cos x + C \quad \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\leadsto \boxed{\frac{-1}{-\cos x + C} = y}$$

*soluzione
generale dell'
equazione differen-
ziale.*

$$\leadsto y = \frac{1}{\cos x - C}$$

Spesso vogliamo trovare una soluzione specifica soggetta ad una (o più) condizioni iniziali.

Definizione Un problema di Cauchy è il problema di trovare una soluzione di un'equazione differenziale che soddisfa Condizioni iniziali del genere:

$$y(a) = y_0 \quad \dots$$

$$y'(a) = y_1 \quad \dots \quad \text{dove } y_0, y_1, \dots \in \mathbb{R}$$

$$y''(a) = y_2 \quad \dots$$

Attenzione : Esistenza e unicità delle soluzioni non sono a priori garantite, però ci sono condizioni sufficienti

che assicurano esistenza e unicità "frequentemente".

Esempio : Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \cdot y^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Abbiamo già risolto l'equazione differenziale, trovando la soluzione generale $y(x) = \frac{1}{\cos(x) - c}$, $c \in \mathbb{R}$.

Adesso voglio trovare c tale che $y(0) = \frac{1}{4}$

$$y(0) = \frac{1}{\cos(0) - c} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-c} = \frac{1}{4} \quad (\Leftrightarrow) \quad 4 = 1 - c$$

$$(\Leftrightarrow) \quad c = -3$$

La mia soluzione per il problema di Cauchy è
allora $y(x) = \frac{1}{\cos(x) + 3}$

In generale, per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo prima trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale, e dopo trovare $c \in \mathbb{R}$ tale che le condizioni iniziali vengono verificate.

Attenzione : Una volta risolto il problema di Cauchy ,
possiamo verificare che la soluzione ottenuta è corretta!

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \cdot y^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{Problema di Cauchy}$$

Candidato a soluzione: $y(x) = \frac{1}{\cos(x)+3}$

$$y'(x) = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2} \quad \sin(x) \cdot y^2 = \sin(x) \cdot \frac{1}{(\cos(x)+3)^2}$$

allora si conferma che
 $\frac{1}{\cos(x)+3}$ è soluzione dell'eq.
differenziale

$$y(0) = \frac{1}{\cos(0)+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

La condizione iniziale
è verificata e allora
si conferma che $y(x)$ è
soluzione del problema
di Cauchy,

Esercizio : Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2x \cos(x^2)}{y-2} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2x \cos(x^2)}{y-2} = \underbrace{2x \cdot \cos(x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y-2}}_{g(y)} \quad \text{separable!}$$

$$\Rightarrow y'(y-2) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{y'(y-2)}_{\frac{dy}{dx} (y-2) dx} dx = \int 2x \cos(x^2) dx$$

$$\Rightarrow \int y-2 dy = \int 2x \cos(x^2) dx$$

$$\int y-2 dy = \frac{y^2}{2} - 2y + c_1$$

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos(z) dz = \sin(z) + c_2 =$$

$\downarrow$
 $z = x^2$
 $\frac{dz}{dx} = 2x \leadsto dz = 2x dx$

$$= \sin(x^2) + c_2$$

Quindi abbiamo $\frac{y^2}{2} - 2y + c_1 = \sin(x^2) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - 2y = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - 2y - \sin(x^2) + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + c}}{2 \cdot 1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + c}$$

cioè, $y = 2 + \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + c}$ o $y = 2 - \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + c}$

Verifichiamo la condizione iniziale;

$$y(0) = 5$$

Nel caso $y = 2 + \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + C}$, abbiamo

$$5 = y(0) = 2 + \sqrt{4 + 2 \sin(0) + C}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{4 + C} \Leftrightarrow 9 = 4 + C$$

$$\Leftrightarrow C = 5$$

Nel caso $y = 2 - \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + C}$

$$5 = y(0) = 2 - \sqrt{4 + 2 \sin(0) + C} \quad \Leftrightarrow 3 = -\sqrt{4 + C}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $-\sqrt{4 + C} < 0$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 2 + \sqrt{4 + 2 \sin(x^2) + 5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = 2 + \sqrt{9 + 2 \sin(x^2)}}$$