



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria della similitudine

Corso di Macchine 1

Agenda

- ▶ La teoria della Similitudine
- ▶ Similitudine meccanica
- ▶ Influenza del numero Reynolds
- ▶ Leggi di Affinità
- ▶ Leggi di Affinità semplificate – Note Integrative





Teoria delle Similitudine

La similitudine meccanica

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad Re_D = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

Per verificare la similitudine di due macchine, deve essere verificata l'uguaglianza di tutti e 5 i numeri adimensionali?

- È noto che i quattro parametri operativi di una turbomacchina non sono indipendenti tra di loro:

$$P_{alb} \quad gh \quad Q_v \quad \omega$$

- Infatti, una volta fissate ω e Q_v , la potenza P_{alb} , e lo scambio di energia gh sono immediatamente e univocamente determinati



E' sufficiente verificare l'uguaglianza di N_f, φ_D, Re_D perché sia verificata anche quella dei numeri di pressione ψ_D e di potenza Π_D

$$\psi_D, \Pi_D = f(N_f, \varphi_D, Re_D)$$

$$\psi, \Pi = f(N_f, \varphi, Re)$$



Influenza del numero di Reynolds

Influenza del numero di Reynolds

- La similitudine meccanica richiede che sia assolta anche la **similitudine** del numero di **Reynolds**, più difficile da verificare perché richiede la conoscenza del **comportamento viscoso** del fluido

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re)$$

Ci sono poi casi in cui a priori è impossibile assolverla: ad esempio per una data macchina (operante con lo stesso fluido) al **variare** del regime di **rotazione** poiché $Re = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$

- Se l'influenza di **Re** fosse **trascurabile**, sarebbe sufficiente la verifica della similitudine geometrica e cinematica per dimostrare la similitudine del numero di pressione ψ

$$\psi = f(N_f, \varphi, \cancel{Re}) = f(N_f, \varphi)$$

Trascurare l'influenza di Reynolds significa trascurare le **forze viscosi** e quindi considerare il fluido è aviscoso → Sono **nulle le perdite idrauliche** gh_r all'interno della macchina

$$\Rightarrow gh_t = gh + \cancel{gh_r}$$

Influenza del numero di Reynolds

Esiste una condizione in cui è possibile effettivamente trascurare l'influenza del Numero di Reynolds??

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re) \quad ?$$

- Hp: si consideri verificata la **similitudine geometrica** N_f e la **similitudine cinematica** φ tra due macchine
- In queste ipotesi è possibile dimostrare che le due macchine avranno gli stessi numeri di pressione ψ_t :

MACCHINA OPERATRICE

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = \frac{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}}{U_2^2} = \frac{C_{u2}}{U_2} - \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 \frac{C_{u1}}{U_1} = \frac{C_{u2}}{U_2} - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \frac{C_{u1}}{U_1}$$

$\psi_t = f(N_f, \varphi)$ stessi numeri di pressione ψ_t ← **similitudine geometrica** **similitudine cinematica**



Influenza del numero di Reynolds

- Se il fluido è reale, la relazione tra il numero di pressione ψ ed il numero di pressione teorico ψ_t è data da:

$$\psi = \frac{gh}{U_2^2} = \frac{\eta_{id} \cdot gh_t}{U_2^2} = \eta_{id} \psi_t \quad \text{MACCHINA OPERATRICE}$$



Per avere anche lo stesso numero di pressione, si deve verificare che le due macchine abbiamo anche lo stesso η_{id}

- La definizione di rendimento idraulico può essere manipolata nel modo seguente:

$$\eta_{id} = \frac{gh}{gh_t} = \frac{gh_t - gh_r}{gh_t} = 1 - \frac{gh_r}{gh_t} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{gh_t} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{\psi_t U_2^2} \quad \text{MACCHINA OPERATRICE}$$

dove gh_r è la perdita di energia per unità di massa

Influenza del numero di Reynolds

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = f(N_f, \varphi)$$

$$\psi = \frac{gh}{U_2^2} = \eta_{id} \psi_t$$

Il rapporto L/D è costante se è assolta la similitudine geometrica

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{\psi_t U_2^2} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} C^2}{\psi_t 2U_2^2}$$

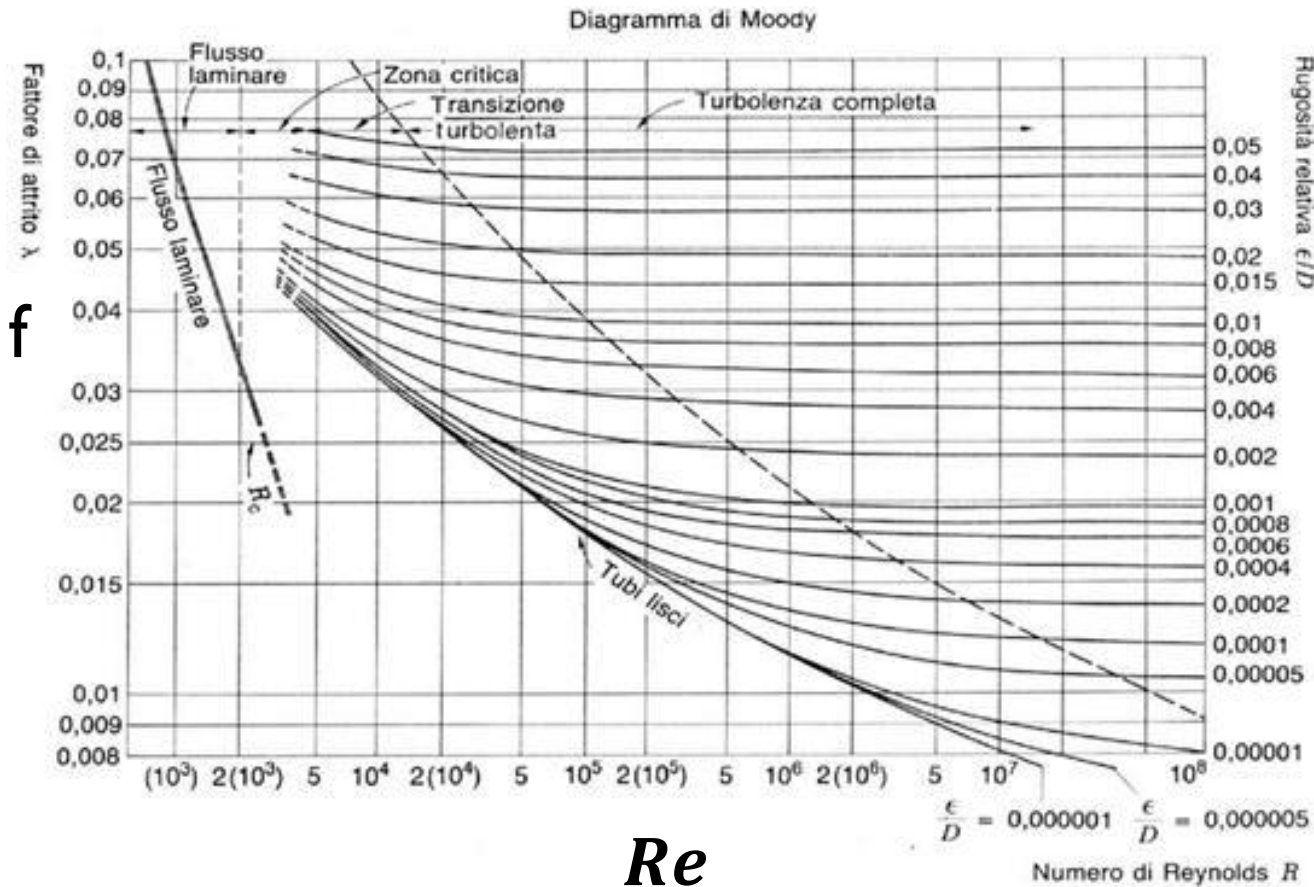
$C/U = cost$ se è verificata la similitudine cinematica

$\psi_t = cost$ se è verificata la similitudine geometrica e cinematica

$$\Rightarrow \eta_{id} = \mathcal{F}(f)$$

Il rendimento η_{id} dipende dal coefficiente di attrito f

Influenza del numero di Reynolds



$$\frac{\epsilon}{D}$$

$$f = \mathcal{F}\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Similitudine geometrica

$$Re = \rho \omega D^2 / \mu > 10^5 \div 10^6$$

Se il moto è turbolento pienamente sviluppato, $f = \text{cost}$ e la similitudine meccanica è verificata



Influenza del numero di Reynolds

- In condizioni di **moto turbolento pienamente sviluppato** $f = \text{cost}$ (diagramma di Moody) e il rendimento idraulico η_{id} si mantiene costante:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D}}{\psi_t} \frac{c^2}{2U_2^2} = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \psi = f(N_f, \varphi, \cancel{Re})$$

- Questa relazione si basa però sull'ipotesi che la scabrezza relativa di due macchine geometricamente simili sia costante:

$$\frac{\epsilon}{D} = \text{cost}$$

... ma la **scabrezza assoluta** ϵ dipende dalla **lavorazione** e non varia apprezzabilmente fra modello e prototipo!!





Leggi di affinità

Leggi di affinità

Come si **relazionano** tra loro le caratteristiche (Q_v, h, D_2) di due macchine A e B?

- Se le due macchine A e B sono in **similitudine meccanica**, i loro numeri adimensionali sono **uguali** e questo porta alla definizione di leggi che vengono chiamate **leggi di affinità**:

$$\varphi_{D_A} = \varphi_{D_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{vA}}{\omega_A D_{2,A}^3} = \frac{Q_{vB}}{\omega_B D_{2,B}^3}$$

$$\psi_{D_A} = \psi_{D_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{gh_A}{\omega_A^2 D_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{\omega_B^2 D_{2,B}^2}$$

*Sebbene la similitudine valga in ogni punto della macchina, solitamente si riferiscono i numeri funzionali alla **sezione 2** di **uscita della girante***

- Tali leggi consentono di determinare le condizioni operative di un'altra macchina meccanicamente **simile** o della stessa macchina ad una diversa **velocità di rotazione**

Leggi di affinità

- Per due macchine in similitudine valgono allora le seguenti relazioni tra parametri operativi e geometrici:

$$\varphi_D = \frac{Q_{vA}}{\omega_A D_{2,A}^3} = \frac{Q_{vB}}{\omega_B D_{2,B}^3} \Rightarrow Q_{vB} = Q_{vA} \frac{\omega_B}{\omega_A} \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^3$$

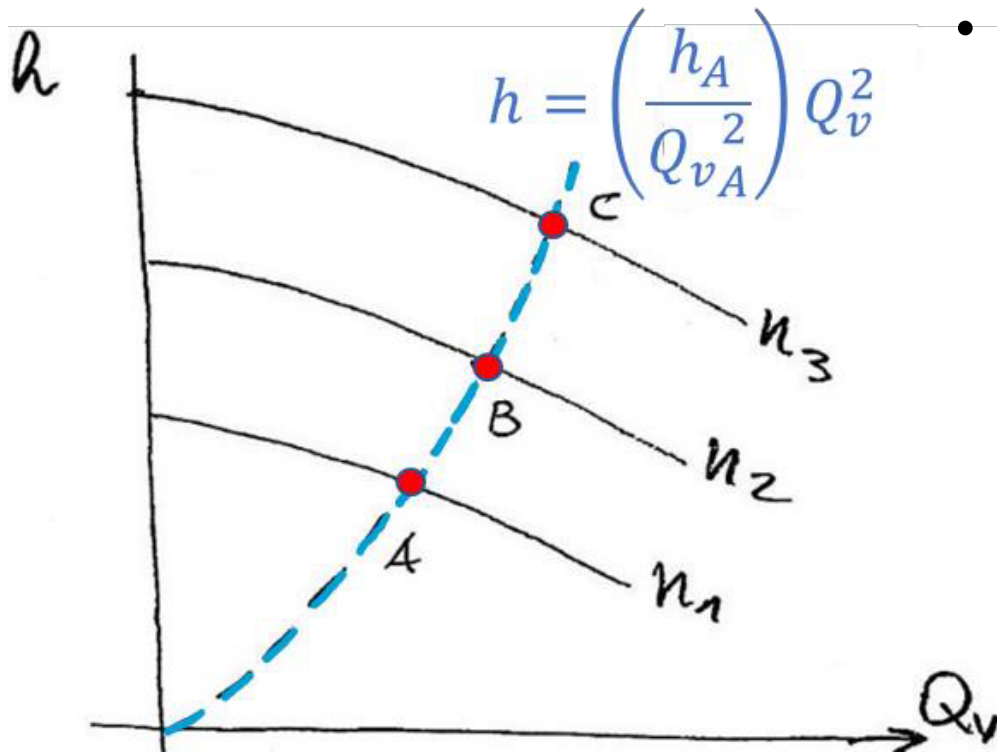
$$\psi_D = \frac{gh_A}{\omega_A^2 D_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{\omega_B^2 D_{2,B}^2} \Rightarrow h_B = h_A \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^2$$

- Se la macchina è la stessa ($D_{2,A} = D_{2,B}$):

$$\left. \begin{aligned} Q_{vB} &= Q_{vA} \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^3 \frac{\omega_B}{\omega_A} = Q_{vA} \frac{n_B}{n_A} \\ h_B &= h_A \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^2 \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 = h_A \left(\frac{n_B}{n_A} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_B = \left(\frac{h_A}{Q_{vA}^2} \right) Q_{vB}^2$$

dove A e B sono *punti omologhi*, cioè punti operativi della macchina in similitudine tra di loro

Leggi di affinità

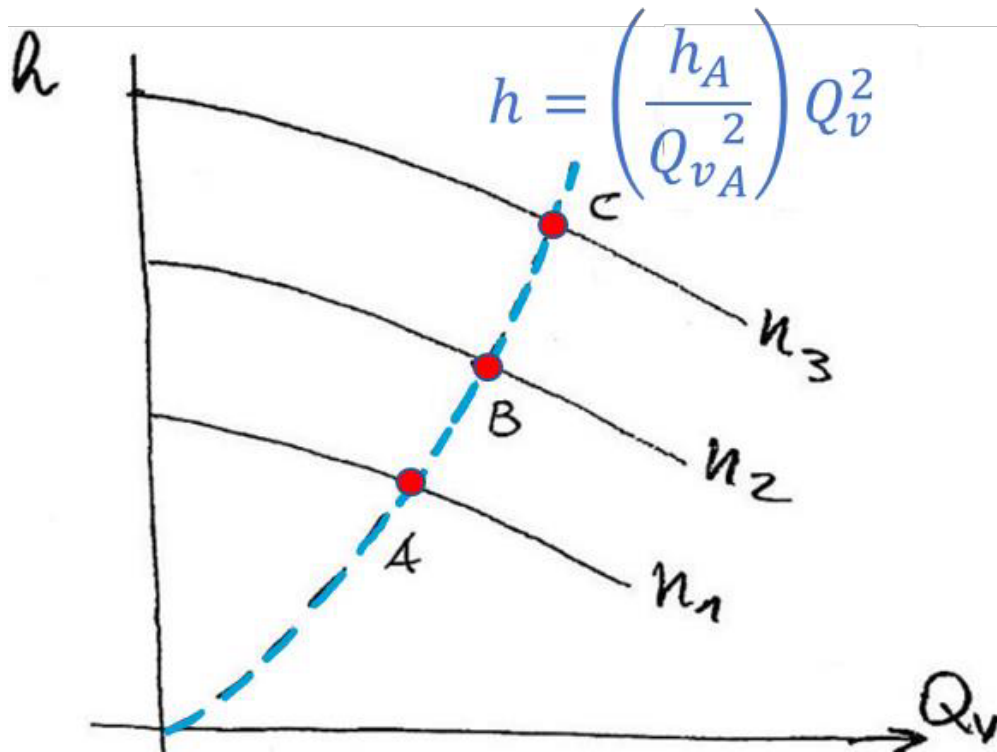


- Il luogo dei **punti omologhi** di funzionamento (stessi φ_D e ψ_D) è rappresentato da una parabola passante per l'origine delle coordinate Q_v, h

Punti omologhi di funzionamento:
condizioni operative in similitudine
meccanica tra loro

- I punti A, B, C sono caratterizzati dagli stessi valori dei numeri di flusso φ_D e di pressione ψ_D
- Non tutti i punti operativi sono in similitudine ma solo quelli che hanno gli stessi valori dei numeri di flusso φ_D e di pressione ψ_D

Leggi di affinità



- La similitudine meccanica può essere espressa anche tramite tutti i parametri dimensionali **strettamente correlati** ai numeri funzionali
- Le stesse leggi possono quindi essere definite facendo riferimento al numero di flusso φ e al numero di pressione ψ

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DB}$$



$$\varphi_A = \varphi_B$$



$$\frac{Cm_{2,A}}{U_{2,A}} = \frac{Cm_{2,B}}{U_{2,B}}$$

$$\psi_{DA} = \psi_{DB}$$

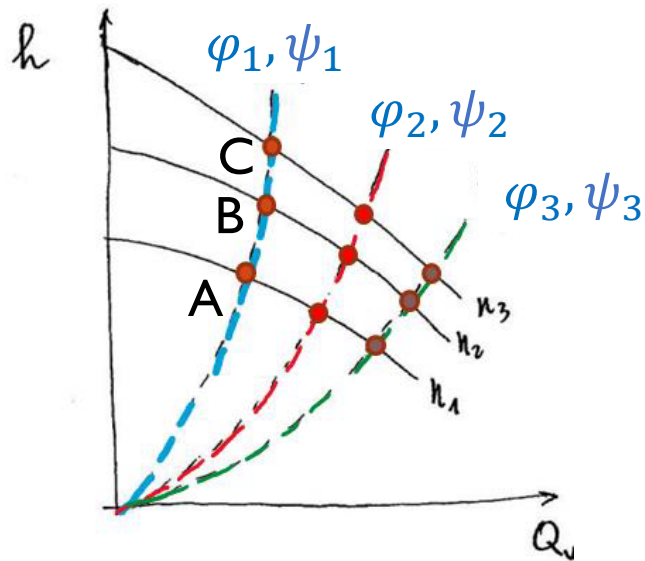


$$\psi_A = \psi_B$$



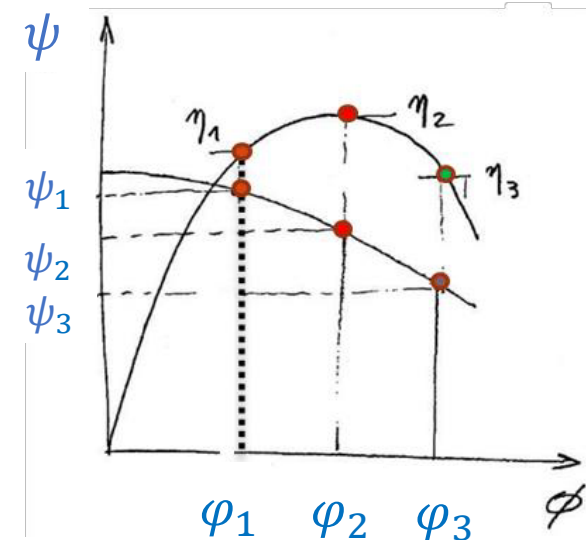
$$\frac{gh_A}{U_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{U_{2,B}^2}$$

Leggi di affinità

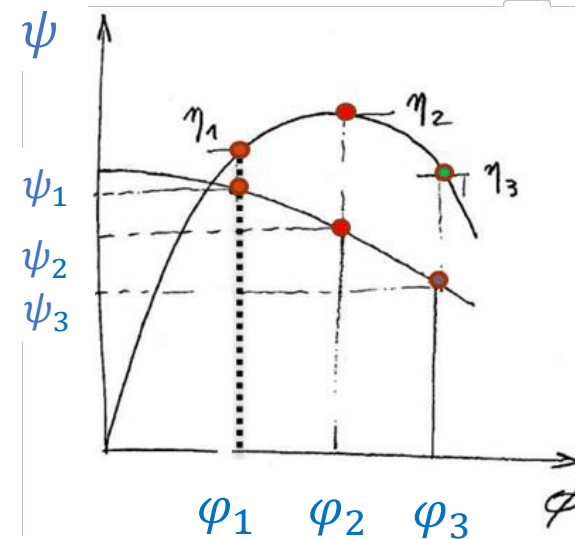
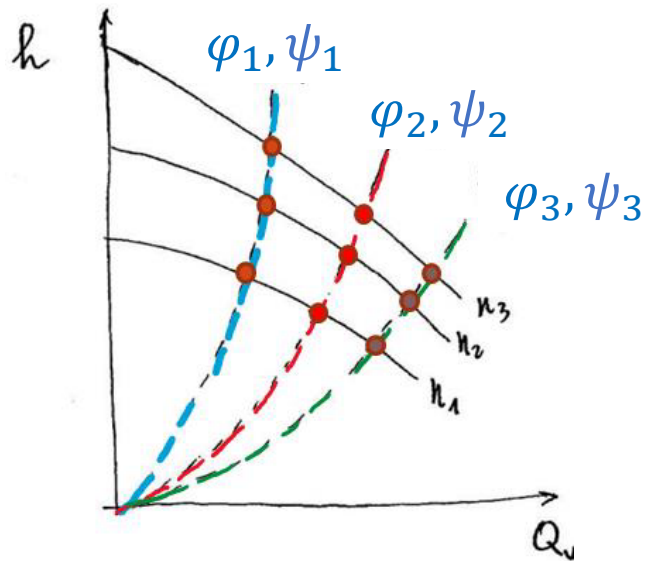


- Ci sono diverse famiglie di punti omologhi, ciascuna associata ad una coppia di valori di numero di pressione e flusso diversi

- Se le curve caratteristiche, anziché in funzione di Q_v e h , sono espresse in funzione di φ e di ψ , i punti A, B, C si sovrappongono in un unico punto che rappresenta tutti i punti omologhi in similitudine tra di loro



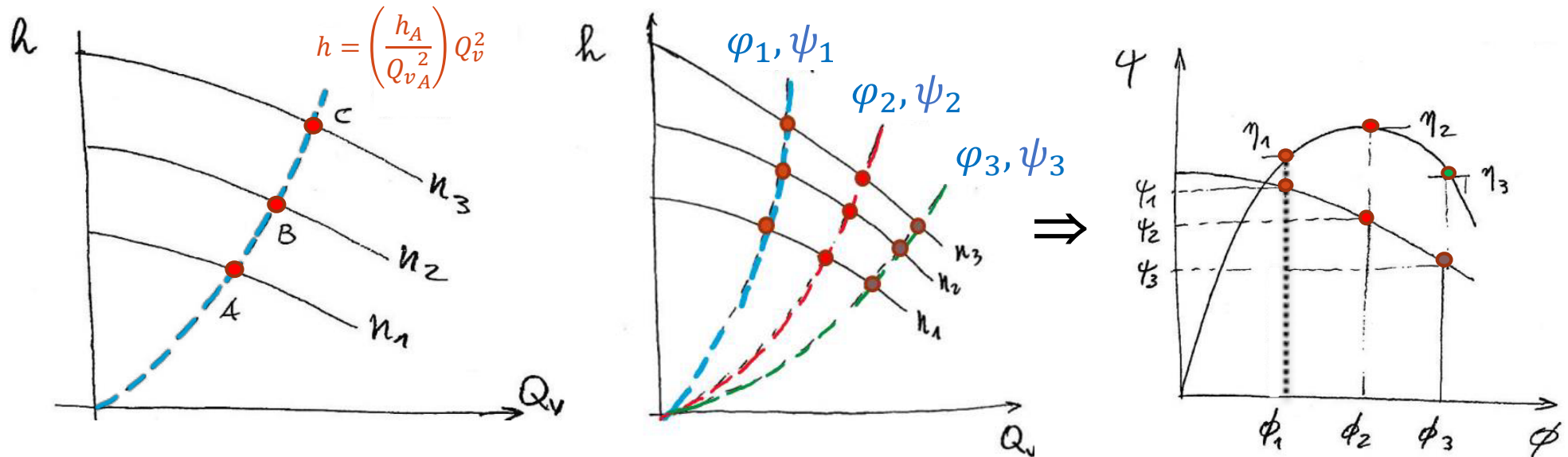
Leggi di affinità



- Si ottiene così un'unica curva $\psi = f(\varphi)$ che rappresenta non solo il funzionamento di una data macchina al variare del regime di rotazione ω ...

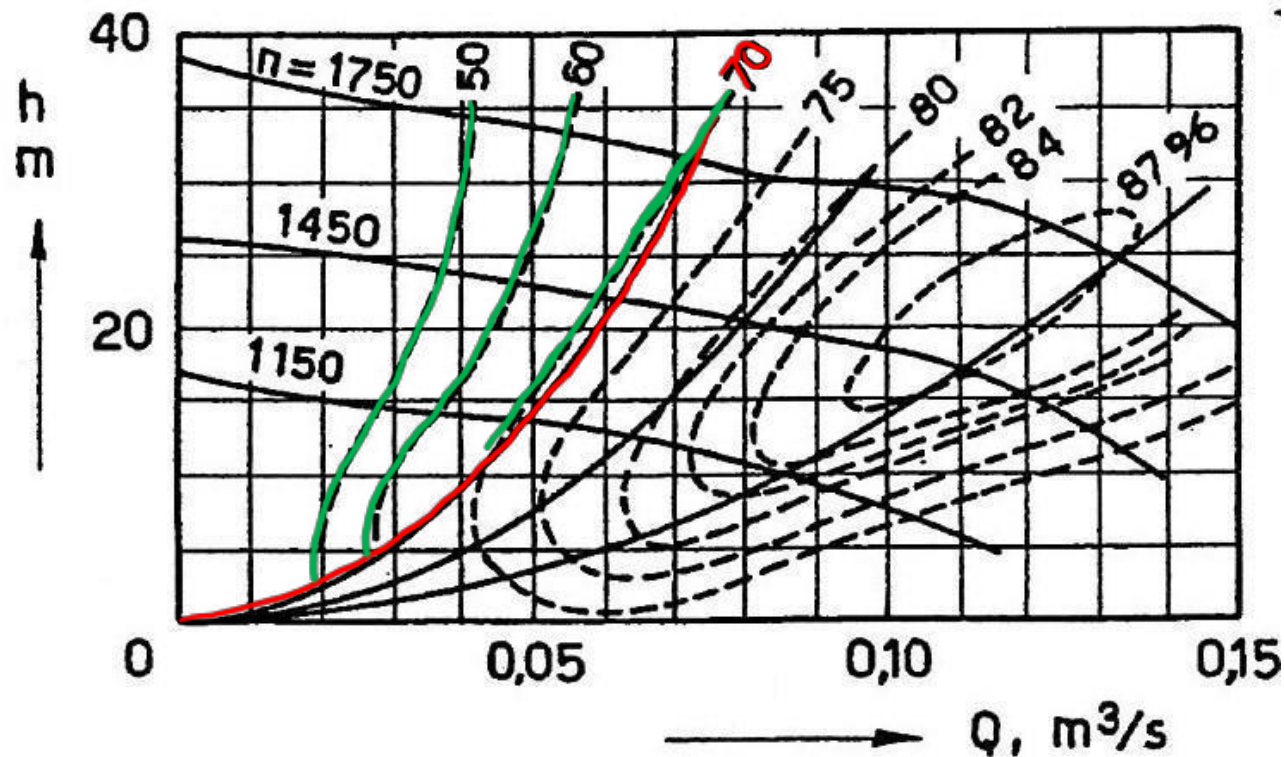
... ma anche quello di ogni **altra macchina** in similitudine meccanica con quella

Leggi di affinità



- In punti omologhi il **rendimento idraulico** si mantiene costante
 - Se anche le **perdite meccaniche** seguissero le stesse leggi di quelle idrauliche, il rendimento complessivo non cambierebbe
- ⇒ Un'unica curva sarebbe in grado di rappresentare, in funzione di ϕ , il rendimento complessivo η di una macchina al variare del regime di rotazione o di un'altra macchina a quella geometricamente simile

Leggi di affinità



- In realtà la dipendenza delle perdite meccaniche dal regime di rotazione è diversa da quella delle perdite fluidodinamiche perché la potenza per attriti meccanici varia con ω con un esponente sensibilmente inferiore a 3
- Gli errori di previsione del rendimento sono perciò più evidenti ai bassi regimi di rotazione

Leggi di affinità – Esercizi

Esercizio 1

Si consideri una pompa centrifuga caratterizzata dai seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_v = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$
- Prevalenza $h = 45 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n = 1600 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb} = 15.6 \text{ kW}$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Determinare le caratteristiche funzionali della medesima macchina operante ad una velocità di rotazione $n = 2000 \text{ giri}/\text{minuto}$

MACCHINA IN SIM MECCANICA

$$\varphi_D, \Pi_D = f(N_F, \varphi_0, Re)$$

note turb complete regulate

$$\varphi_D, \Pi_D = f(N_F; \varphi_0)$$

PER VEDERE LE PREST. $\rightarrow$ APPLICO LE LEGGI DI AFFINITA'

$$\varphi_{D,A} = \varphi_{D,B} = \frac{QV}{\omega D_2^3}$$

$$\varphi_{D,A} = \varphi_{D,B} = \frac{g h}{\omega^2 D_2^2}$$

$$\Pi_{D,A} = \Pi_{D,B} = \frac{P_{ell}}{\rho \omega^3 D_2^5}$$

D_2 = DIAM EST DELLA

GIRANTE $\rightarrow$ INGOMBRO
MACCHINA

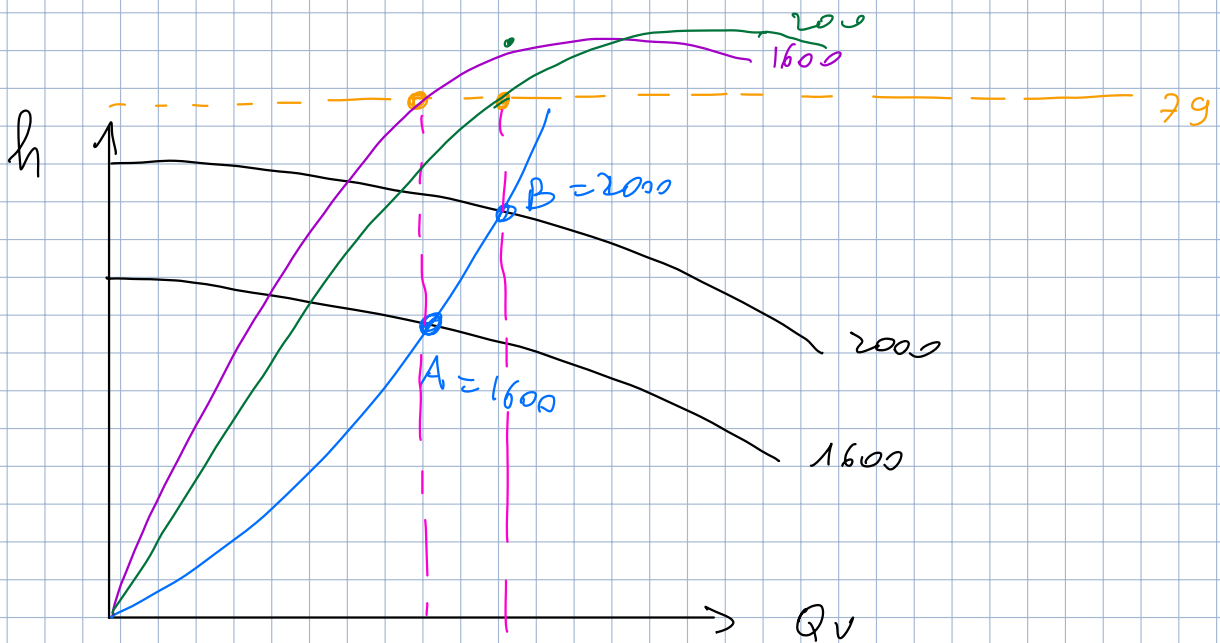
CANAL. FUNZ $\rightarrow h_{2000 \text{ giri/min}}, QV_{2000 \text{ giri/min}}, P_{ell, 2000}$

LA MACCHINA E' LA STESSA CHE RUOTA A VEL DIVERSE $\rightarrow D_{2,A} = D_{2,B} \rightarrow D_{2,1600} = D_{2,2000}$

$$h_{2000} = h_{1600} \cdot \left(\frac{n_{2000}}{n_{1600}} \right)^2 = 45 \cdot \left(\frac{2000}{1600} \right)^2 = 70 \text{ m}$$

$$QV_{2000} = QV_{1600} \cdot \left(\frac{n_{2000}}{n_{1600}} \right) = 0,028 \cdot \frac{2000}{1600} = 0,035 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

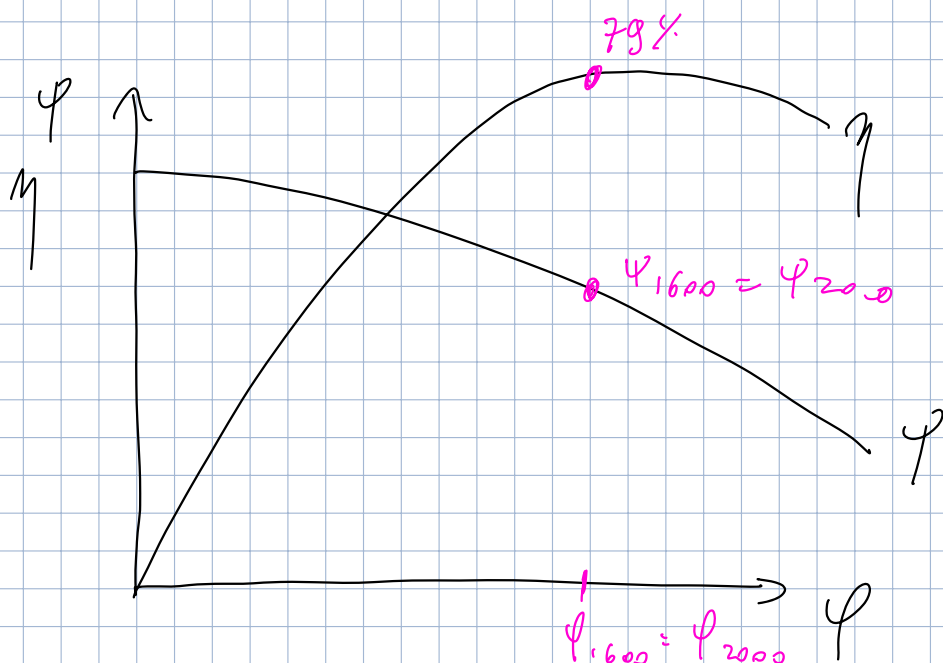
$$P_{2000} = P_{1600} \cdot \left(\frac{n_{2000}}{n_{1600}} \right)^3 = 15,6 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{2000}{1600} \right)^3 = 30500 \text{ W}$$



$$\eta_{1600} = \eta_{2000}$$

$$\eta_{1600} = \left(\frac{\rho Q_v g h}{P_{\text{ell}}} \right)_{1600} = \frac{1000 \cdot 9,806 \cdot 0,028 \cdot 45}{15,6 \cdot 10^3} = 79\%$$

$$\eta_{2000} = \left(\frac{\rho Q_v g h}{P_{\text{ell}}} \right)_{2000} = \frac{1000 \cdot 9,806 \cdot 0,035 \cdot 70}{30500} = 79\%$$



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

