

Lesson 34

Ricordo: stiamo studiando integrali generalizzati;
in generale, se $f(x)$ è definita in
un intervallo (a, b) , cioè $a < x < b$,
allora ha senso studiare

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

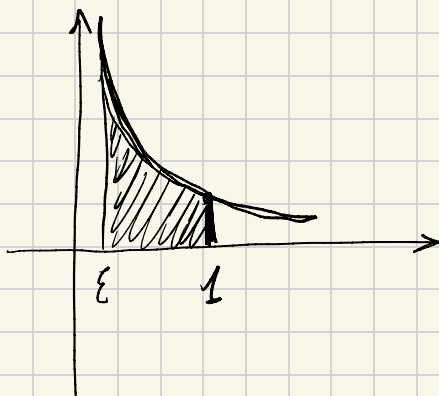
Esempio 1 $f(x) = \frac{1}{x}$.

Voglio considerare l' integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

Devo studiare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$



$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[\ln |a| \right]_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[\ln(x) \right]_{\varepsilon}^1 \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln(\varepsilon)) = +\infty.$$

Esempio 2 Studio la convergenza della
serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

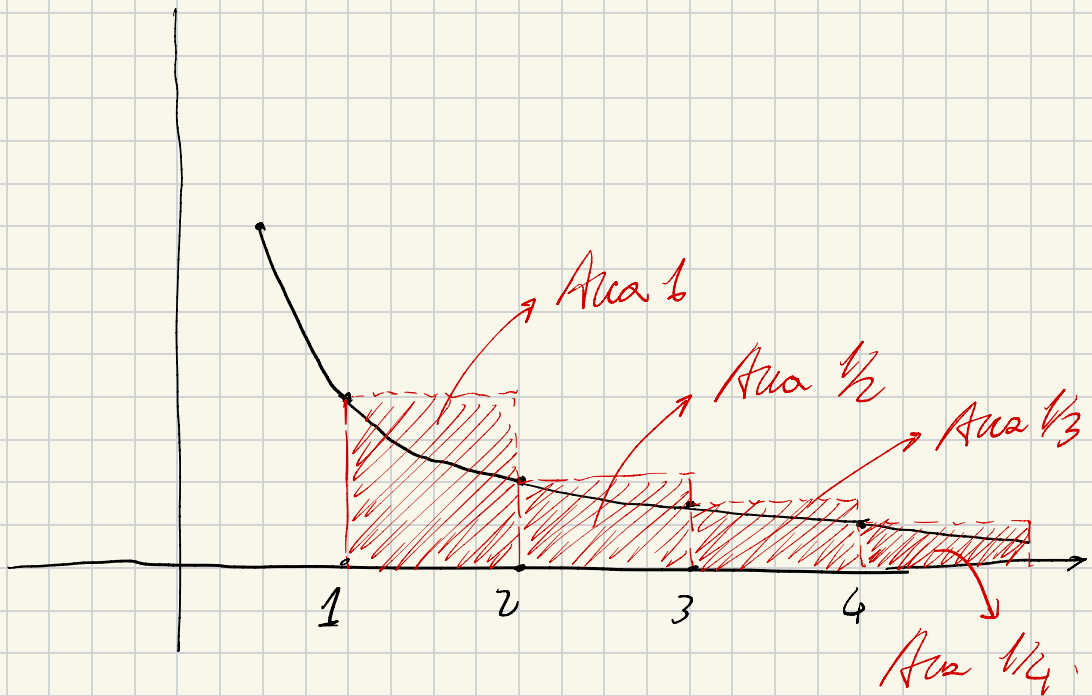
Considero la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.



$\text{Area vol } 1$

$\text{Area vol } 1/2$

Osservo che posso anche disegnare le
aree in modo diverso:



Nota dal secondo grafico che

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^{N+1} = \ln(N+1)$$

Segue

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N+1) = +\infty$$

Quindi, la serie diverge (per definizione).
cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

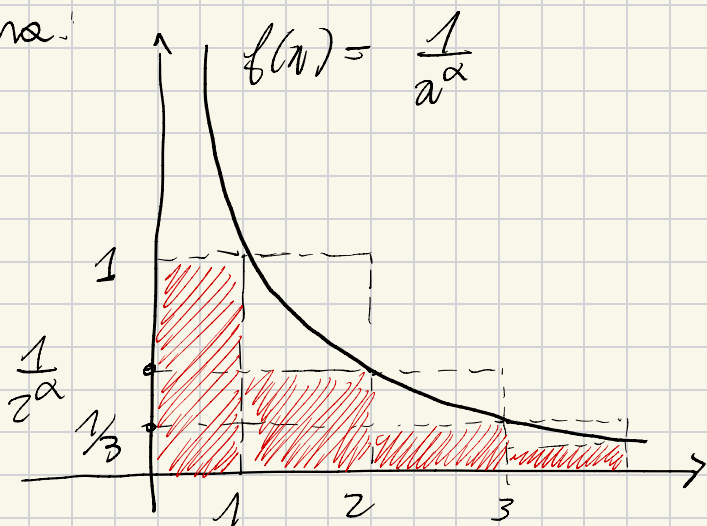
Esempio 3 Convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha}.$$

($\alpha \neq 1$, caso $\alpha = 1$ è l'Es. 2.).

Già sappiamo (l'abbiamo osservato al tempo della serie) che se $|\alpha| < 1$, allora la serie diverge. Vedo come

succede a $\alpha > 1$: stessa strategia
 di prima:



Nota che l'area rossa è

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Nota anche che

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Infine, noto che

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} &\leq \int_1^N \frac{1}{n^\alpha} dn = \int_1^N n^{-\alpha} dn \\
 &= \left[\frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^N = \\
 &= \frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \\
 &= \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \\
 &= \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{\alpha-1}$$

$\downarrow 0$
 perché $\alpha > 1$

Punt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

per cui la serie converge.

Oss. Per gli integrali generalizzati
valgono teoremi simili a quelli
studiati per le serie, cioè confronto e
confronto asintotico.

Confronto Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$,
 $\forall x \in [a, +\infty)$, allora:

(.) Se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge

(.) Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

dove per una funzione $h: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
dico che $\int_a^{+\infty} h(x) dx$

converge se $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N h(x) dx < +\infty$

diverge se $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N h(x) dx = +\infty$

Si dice anche
che la funzione h è
integrabile in senso generalizzato

Esempio: simili per funzioni definite
in $(a, b]$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$$

Esempio 3 Studio $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(cioè, dire se e^{-x^2} è integrabile in
senso generalizzato tra 0 e $+\infty$).

Studio la funzione e^{-x^2} .

Domus $\mathbb{R}^2$

Segno: $f(x) \geq 0 \forall x$.

Pari: $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ studio solo $x \geq 0$

A.O. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$

Derivate I (crescenza & decrescenza, max. e min)

$$\begin{aligned}(e^{-x^2})' &= e^{-x^2} \cdot (-x^2)' \\ &= -2x e^{-x^2}.\end{aligned}$$

Sempre decrescente in $x \geq 0$.

($f(x)$ ha massimo in $x=0$).

Derivate II (concavità e flessi)

$$\begin{aligned}(-2x e^{-x^2})' &= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).\end{aligned}$$

Segno $f''(x)$: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(per $x > 0$).

lim in $x = 1/\sqrt{2}$.

Concave:

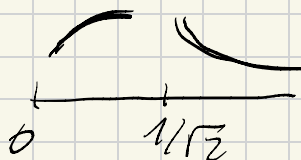
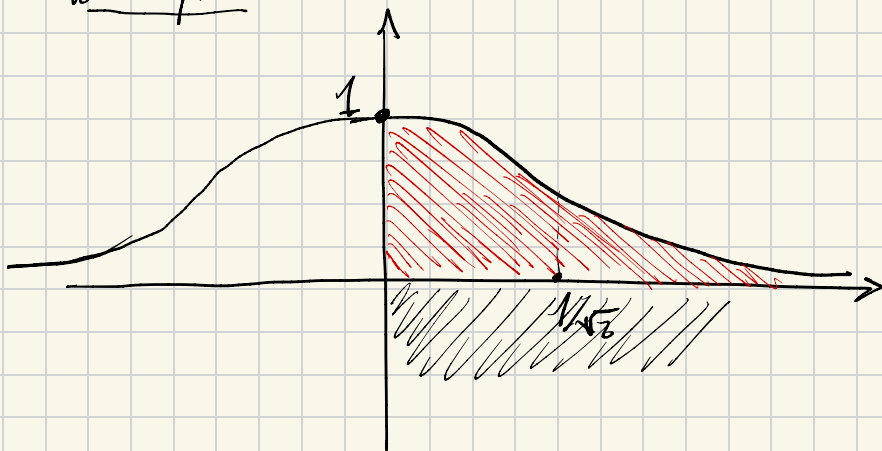
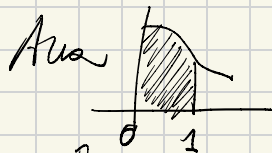


Diagram:



Studio

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$



e in numero!

Scrivo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \boxed{\int_0^1 e^{-x^2} dx} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

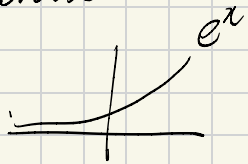
↓
Per studiare la convergenza,
mi concentro solo su questo punto.

Studio

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Nota che per $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, quindi

$$-x^2 \leq -x, \text{ quindi } e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$



Quindi

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_1^N$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-e^{-N} - (-e^{-1}) \right) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(e^{-1} - \frac{1}{e^N} \right) = \frac{1}{e}$$

Esempio

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge per il

teorema del confronto: $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$.

Esempio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$.

Studio $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Domus: $\mathbb{R}$.

Segno: $\frac{1}{1+e^x} \geq 0, \forall x$.

Int. am: $x=0, f(x) = \frac{1}{2}$.

A.O. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$

Crescenza, decrescenza, max, min

$$\left(\frac{1}{1+e^x}\right)' = \frac{-(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \leq 0, \forall x.$$

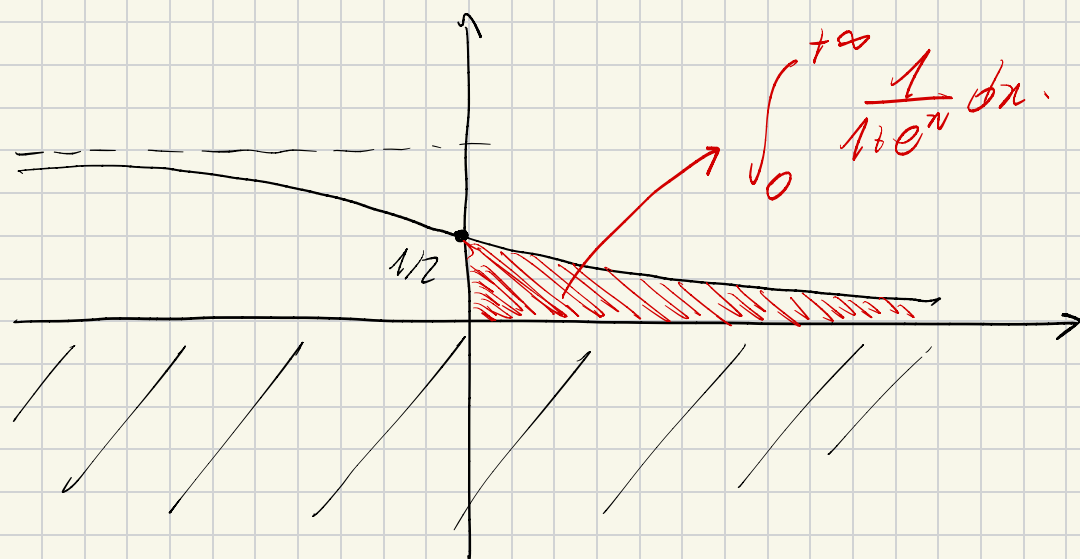
funzione sempre decrescente.

Concavità e flesso

$$\begin{aligned} \left(\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\right)' &= \frac{-e^x(1+e^x)^2 - (-e^x) \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{(1+e^x) \left[-(1+e^x) \cdot e^x + e^x \cdot 2e^x \right]}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^x)^3} (-1 - e^x + 2e^x) \\ &= \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Segno: } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

trovare l'area in $x=0$



Calcola la primitiva (integrale indefinito)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

Per sostituzione: $t = e^x$

$$dt = e^x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{dt}{t}$$

!

$$\int \frac{1}{t(t+1)} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= \ln|t| - \ln|t+1| \\
 &= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right|
 \end{aligned}$$

Sostituisco $t = e^x$

$$= \ln \left| \frac{e^x}{e^{x+1}} \right| = \ln \left(\frac{e^x}{e^{x+1}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t(t+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \\
 &= \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} \\
 &= \frac{t(A+B) + A}{t(t+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Resta da calcolare l'integrale definito tra 0 e N e fare il limite per $N \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^N \frac{1}{1+e^x} dx &= \left[\ln \left(\frac{e^x}{e^{x+1}} \right) \right]_0^N \\
 &= \ln \left(\frac{e^N}{e^{N+1}} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

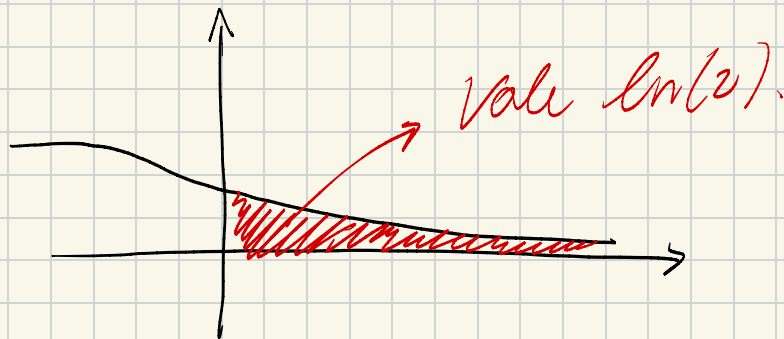
$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_6^N \frac{1}{16e^x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{e^N}{e^{N+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{16}\right) \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^N}{e^{N+1}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{N+1}}{e^{N+1}(1+1/e^N)}\right) = \ln(1) = 0.$$

Puoi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{16e^x} dx = -\ln(1/2) = \ln(2).$$

Piamente



Esempio?

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Es. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx.$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

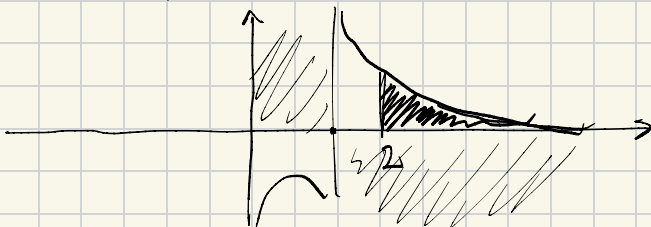
D: $x > 0, x \neq 1.$

Signo: $x \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty.$$



$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$\boxed{t = \ln(x)} \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx &= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \\ &= \left[\ln(\ln(t)) \right]_{\ln(2)}^{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

Donc, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ diverge à $+\infty$.

Ex. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)} dx$

$$\hookrightarrow \cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

e utiliser la substitution
 $t = \tan(\frac{x}{2})$.