Esercizio → Sia $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare,
sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & k & 0 \\ 0 & -3 & k-1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di k il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovettore di A_k.
Per tale valore di k, scrivere a quale autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ é associato.
Calcolare la molt. geom. di λ.

b) Dire per quali valori di k lo scalare 4 é autovalore di A_k

c) Per quali k é diagonalizzabile

d) Determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$

a) $$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & k & 0 \\ 0 & -3 & k-1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Updownarrow$$

$k = 0 \wedge \lambda = -3 \leftarrow$ autovalore

$$V_{-3} = \ker \begin{pmatrix} -3-\lambda & k & 0 \\ 0 & -3-\lambda & k-1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } k \neq 0 \qquad m.g. = 1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } k = 0 \qquad m.g = 2 \end{cases}$$

b) $$P(t) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & k & 0 \\ 0 & -3-\lambda & k-1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)^2 (4-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda = 4$ é radice di $P(t)$ $\forall k$

c) $\lambda = 4 \quad m.a = 1 = m.g$

$\lambda = -3 \quad m.a = 2 = m.g \iff k = 0$

$\Rightarrow f_k$ é diagonalizz. solo per $k = 0$

d) $V_4 = \ker \begin{pmatrix} -7 & k & 0 \\ 0 & -7 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} k(k-1) \\ 7(k-1) \\ 49 \end{pmatrix} \right\rangle$

per $k=0 \Rightarrow V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$

una base di autovettori è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$

e) determinare D e T t.c. $D = T^{-1} A T$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"', "D"] \arrow[d, "T_B^{\mathcal{E}_3}"', "id"] & B \\ \mathcal{E}_3 \arrow[r, "A", "f"'] & \mathcal{E}_3 \arrow[u, "id", "T_{\mathcal{E}_3}^B"'] \end{tikzcd}$$

$$T = T_B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= -3v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) &= 0v_1 - 3v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) &= 0v_1 + 0v_2 + 4v_3 \end{aligned}\right\} \quad D = D_{B,B} f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\exists$ infinite T che diagonalizzano A_0, una $\forall$ base di autovettori di A_0

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow D_{BB} f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = T_1^{-1} A_0 T_1$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow D_{BB} f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = T_2^{-1} A_0 T_2$$

$\in V_{-3}$ $\in V_4$

1)

ESERCIZIO → Si consideri $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & 1 \\ 0 & -2(k+1)^2 & -2k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

λ autovalore $\Leftrightarrow$ $V_\lambda \neq \{\bar{0}\}$

$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$ → $Av = \lambda v$ → $Av - \lambda v = 0$ $(A - \lambda I)v = 0$ $V_\lambda = \ker(A - \lambda I) \neq \{\bar{0}\}$

a) $\forall k \in \mathbb{R}$, determina autovalori di A_k e la molteplicità algebrica

b) per quali $k \in \mathbb{R}$, A_k è diagonalizz. ?

c) $\exists$ due valori $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tc A_{k_1} é simile ad A_{k_2} ? Quali?

a) $P_{A_k}(t) = \det(A - t\mathbb{I}_3) = \det\begin{pmatrix} k-1-t & 0 & 0 \\ 0 & k+3-t & 1 \\ 0 & -2(k+1)^2 & -2k-t \end{pmatrix}$

$= [(k-1)-t]\left[(k+3-t)(-2k-t) - (-2)(k+1)^2\right]$

$= [(k-1)-t]\left[-\cancel{2k^2} - tk - 6k - 3t + 2kt + t^2 + \cancel{2k^2} + 2 + 4k\right]$

$= [(k-1)-t]\left[t^2 + t(k-3) - 2(k-1)\right]$

$= [(k-1)-t](t-2)(t+(k-1)) \quad \rightarrow -2t + t(k-1) = -2t + tk - t \overset{!}{=} tk - 3 \ \checkmark$

$= -(t-(k-1))(t-(1-k))(t-2)$

autovalori di A_k: $\begin{cases} t = 2 & \text{con } m.a = 1 \\ t = k-1 & \text{con } m.a = 1 \\ t = 1-k & \text{con } m.a = 1 \end{cases}$ solo se $\begin{cases} k-1 \neq 1-k & \rightarrow k \neq 1 \\ k-1 \neq 2 & \rightarrow k \neq 3 \\ 1-k \neq 2 & \rightarrow k \neq -1 \end{cases}$

indaghiamo le molteplicità per $k = 1, 3, -1$:

$P_{A_1}(t) = -(t-0)(t-0)(t-2) = -t^2(t-2) \rightarrow P_{A_1}(t) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 & m.a = 2 \\ t = 2 & m.a = 1 = mg \end{cases}$

$P_{A_3}(t) = -(t-2)(t-(-2))(t-2) = -(t-2)^2(t-(-2)) \rightarrow P_{A_3}(t) = 0 \iff \begin{cases} t = 2 & m.a = 2 \\ t = -2 & m.a = 1 \end{cases}$

$P_{A_{-1}}(t) = -(t-(-2))(t-2)(t-2) = -(t-(-2))(t-2)^2 \rightarrow P_{A_{-1}}(t) = 0 \iff \begin{cases} t = +2 & m.a = 2 \\ t = -2 & m.a = 1 = m.g \end{cases}$

b) A è diagonalizzabile $\iff$ ① $P_A(t)$ ha tutte radici in $\mathbb{R}$ reali
② $ma(t) = mg(t)$ $\forall$ autovalore t di A
(devo avere una base di autovettori in $\mathbb{R}^3$)

(dal corollario) se ho 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile $(1 \leq \underset{\nearrow 1}{mg} \leq \underset{\overset{\|}{1}}{ma} \leq 3)$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile per $k \neq -1, 1, 3$

$\Rightarrow$ devo studiare la diagonalizzabilità per $k = -1, 1, 3$

$K=-1$ $\Rightarrow$ $A_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P_{A_{-1}}(t) = -(t-(-2))(t-2)^2$

$m.g(t=2)$: $V_2 = \ker(A_{-1} - 2\mathbb{I}_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \dim V_2 = 1 = mg(2) < ma(2) = 2 \Rightarrow A_{-1}$ non é diagonalizz.

$K=1$ $\Rightarrow$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad V_0 = \ker(A_0 - 0\mathbb{I}_3) = \ker A_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \dim V_0 = 2 = ma \Rightarrow A_1$ é diagonalizz.

$K=3$ $\Rightarrow$ $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -32 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad V_2 = \ker(A_3 - 2\mathbb{I}_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -32 & -8 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \dim V_3 = 2 = ma \Rightarrow A_3$ diagonalizz.

c) K_1, K_2 t.c. $A_{K_1} \sim A_{K_2}$?

A_{K_1} diagonalizz e $A_{K_1} \sim A_{K_2} \Leftrightarrow A_{K_2}$ diagonalizzabile e $P_{A_{K_1}}(t) = P_{A_{K_2}}(t)$

$\Rightarrow$ due matrici diagonalizz sono simili $\Leftrightarrow$ hanno stesso polinomio caratt.

A_K é diagonalizz $\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ad esempio $K_1 = 0$ e $K_2 = 2$

$P_{A_0} = -(t-2)(t-1)(t+1) = P_{A_2}$

anche $K_1 = 4$ e $K_2 = -2$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $(-1, 3, -1)$ è autovettore della matrice A_k. Esiste un k_0 tale che $(-1, 3, -1)$ sia autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore 3?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Determinare un $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

ESERCIZIO 3

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-k \\ 3(k+1) \\ -k-1 \end{pmatrix} = (k+1)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ é autovettore di A_k $\forall$ valore di $k \in \mathbb{R}$, relativo all'autovalore $k+1$

$\Rightarrow \exists\ k_0$ t.c. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ é autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore $\lambda = 3$

$\lambda = 3 = k_0 + 1 \Rightarrow k_0 = 2$

b) Polinomio caratteristico:

$P(t) = \det(A_k - t\,\mathbb{I}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & k \\ 0 & k+1-t & 0 \\ k & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$

$= (k+1-t)\left[(1-t)^2 - k^2\right] = (k+1-t)(1-t-k)(1-t+k) = ((k+1)-t)^2((1-k)-t)$

A_k ha i seguenti autovalori:

$t = k+1$ con m.a. $= 2$
$t = 1-k$ con m.a. $= 1$
$\Big\}$ se $k \neq 0$; se $k = 0 \Rightarrow P(t) = (1-t)^3$ e $t = 1$ é autovalore di A_0 con m.a. $= 3$

Per la diagonalizzabilità studio:

$V_{k+1} = \ker(A_k - (k+1)\mathbb{I}_3) = \ker\begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ per $k \neq 0$

$\Rightarrow$ m.g. $(k+1) = 2 =$ m.a $\Rightarrow A_k$ é diagonalizzabile per $k \neq 0$

Studio V_1 quando $k = 0$

$V_1 = \ker(A_0 - (1)\mathbb{I}_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$ m.g. $(1) = 3 =$ m.a

$\Rightarrow A_k$ é diagonalizzabile $\forall k \in \mathbb{R}$

c) Calcolo il polinomio caratteristico di B

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & -2 \\ 0 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t\,(2-t)^2$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori di B sono: $t=0$ con $m.a=1$

$t=2$ con $m.a=2$

Studiamo $V_2 = \ker(B - 2I_3)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow B \text{ diagonalizzabile}$$

Poiché A_k e B sono diagonalizzabili $\Rightarrow A_k \sim B$ se hanno stesso polinomio caratt.

$$P_{A_k}(t) = ((k+1)-t)^2((1-k)-t) \qquad \begin{cases} (1-k)-t = -t & \rightarrow k=1 \\ (k+1)-t = 2-t & k=1 \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow$ B e A_1 sono simili $\Rightarrow k_1 = 1$ e tale scelta è unica

d) Troviamo una base di autovettori di B:

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e } V_0 = \ker(B - 0I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si ha
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = K^{-1} B K$$

Troviamo una base di autovettori di A_1:

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e } V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si ha
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = Z^{-1} A_1 Z$$

$$\Rightarrow K^{-1} B K = Z^{-1} A_1 Z \quad \longrightarrow \quad B = K Z^{-1} A_1 Z K^{-1}$$

$$H = Z \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$