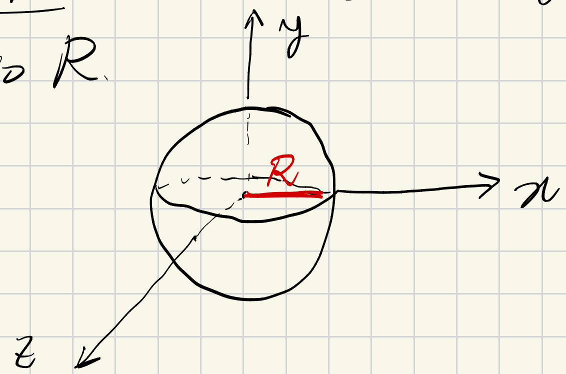
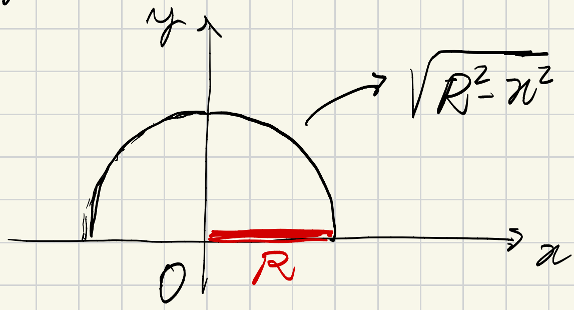
Lezione 37

<u>Esempio</u> Calcolo del volume di una sfera, di raggio R.



La sfera taglia nel piano Oxy una circonferenza di raggio R.
Vedo la sfera come un solido di rotazione ottenuto dalla rotazione di questa circonferenza attorno all'asse x:



Calcolo il volume della sfera usando la formula ricavata

$$Vol = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Nel nostro caso questa formula diventa:

$$\text{Volume sfera} = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\, dx$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} R^2 dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx$$

$$= \pi \left[R^2 x\right]_{-R}^{R} - \pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left(R^3 - (R^2 \cdot (-R))\right) - \pi \left(\frac{1}{3}R^3 - \left(\frac{1}{3}(-R)^3\right)\right)$$

$$= \pi (R^3 + R^3) - \pi \left(\frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}R^3\right)$$

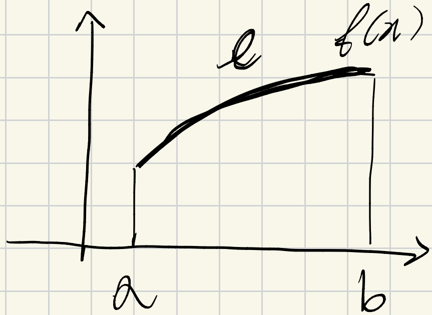
$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= 2\pi R^3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

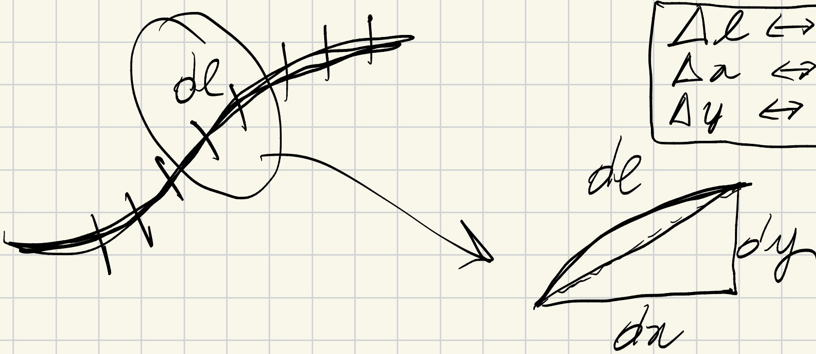
Calcolo di lunghezze di un arco di curva

(anche questa, come i volumi di solidi di rotazione, è un'applicazione della teoria dell'integrazione).



Ci chiediamo quale sia la lunghezza l del tratto di curva $f(x)$ compresa tra a e b

Guardiamo cosa succede nella curva isolando un tratto dl:



$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta l \leftrightarrow dl \\ \Delta x \leftrightarrow dx \\ \Delta y \leftrightarrow dy\end{array}}$$

$dl \simeq \sqrt{dx^2+dy^2}$ = ipotenusa di un triangolo di lati $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Poiché $y = f(x)$, allora

$dy = f'(x)\,dx$. (formalmente $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$)

Dunque

$$dl \simeq \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Quindi, la lunghezza l che ci interessa si ottiene (stessa strategia per il calcolo delle aree)

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Riassumendo, la lunghezza dell'arco è

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

<u>Esempio</u>. $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

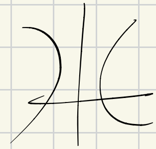
Voglio calcolare la lunghezza l della <u>catenaria</u> (cioè del $\cosh x$) tra a e b.
Uso la formula:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(\underbrace{\cosh(x)'}_{\sinh(x)})^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(\sinh(x))^2}\,dx$$

Ricordo che

$$-(\sinh(x))^2 + (\cosh(x))^2 = 1$$



Dunque

$$l = \int_a^b \sqrt{\cosh(x)^2}\, dx = \int_a^b \cosh(x)\, dx =$$

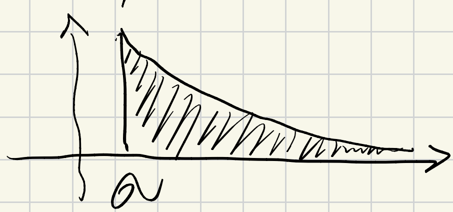
$$= \Big[\sinh(x)\Big]_a^b = \sinh(b) - \sinh(a).$$

<u>Esercizio</u> Calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza tra ϑ_1 e ϑ_2.

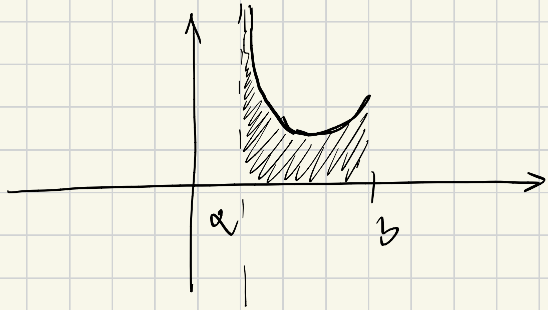
<u>Integrali generalizzati</u>

Idea: calcolare (se possibile) aree di regioni illimitate del piano.
Saranno espressioni del tipo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Per definirli, facciamo come abbiamo fatto per le serie.

Definiamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{se esiste}}{=} \lim_{x_0\to+\infty} \int_a^{x_0} f(x)\,dx$$

funzione definita in $[a,+\infty)$.

Similmente,

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{x_0\to-\infty} \int_{x_0}^a f(x)\,dx$$

f definita in $(-\infty,a]$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to +\infty} \int_{-x_0}^{x_0} f(x)\,dx$$

f definita in $\mathbb{R}$.

Se $f:(a,b] \to \mathbb{R}$, posso similmente definire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to a^+} \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx,$$

e similmente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to b} \int_a^{x_0} f(x)\,dx.$$

$f:[a,b) \to \mathbb{R}$

Posso fare le combinazioni: esempio se $f:(a,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{x_0 \to a \\ x_1 \to \infty}} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

, eccetera.

L