Lezione 32

Esempio (Integrazione per parti)

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx =$$

Se $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$.

Ricorda

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f' g\,dx$$

$$= \int \ln(x)\cdot 1\,dx = \ln(x)\cdot x - \int x\cdot(\ln(x))'\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

$$= x(\ln(x) - 1) + C.$$

Altri esempi (da svolgere come esercizio)

$$\int x e^x\,dx\ ;\quad \int x^2 e^x\,dx\ ;\quad \int x^3 e^x\,dx \ \ldots$$

Esempi di integrali che "non si riesce a calcolare".

↳ nel senso che non si possono esprimere con funzioni elementari note.
(polinomi, e^x, $\ln(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$.....)

Esempio

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

$\frac{\sin(x)}{x}$ non è la derivata di una funzione elementare; vedo se l'integrazione per parti funziona.

Posso prendere:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow g(x) = -\cos(x).$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} = -\frac{1}{x}\cos(x) - \underbrace{\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{PIÙ COMPLICATA DI } \frac{\sin(x)}{x}\,!}$$

(2) Posso prendere $f(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow g(x) = \ln|x|.$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} = \sin(x)\ln|x| - \underbrace{\int \cos(x)\ln|x|\,dx}_{\text{PIÙ COMPLICATA DI } \frac{\sin x}{x}.}$$

Quello che si può fare è svilupparla in serie:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots \right) dx$$

$$= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx$$

$$= x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \frac{1}{6}\frac{x^7}{7!} \dots$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Sviluppo in serie di $\frac{\sin(x)}{x}$.

Integrazione per sostituzione

Supponiamo che

$$\int f(x)\,dx = G(x)$$

cioè supponiamo che la derivata di G sia f.

Supponiamo anche che x dipenda da una seconda variabile, che chiamo t, cioè scriviamo un cambio di variabile del tipo

$$x = \varphi(t).$$

per qualche funzione φ. Quindi avremo

$$G(x) = G(\varphi(t)).$$

Esempio Nel caso $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, possiamo prendere $t = 2x+1$, cioè

$$x = \frac{t-1}{2}$$

così che $\varphi(t) = \frac{t-1}{2}$, e

$$G(x) = G(\varphi(t)) = G\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

Torno alla discussione generale. Calcolo la derivata di $G(\varphi(t))$ rispetto alla variabile t.
(in altre parole, voglio calcolare la derivata (in t) della funzione $t \longmapsto G(\varphi(t))$).

$$\big(G(\varphi(t))\big)' = G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t). \quad (*)$$

(regola di derivazione delle funzioni composte).
Quindi, ottengo l'uguaglianza

$$\int \big(G(\varphi(t))\big)' dt \underset{\text{FORMULA } (*)}{=} \int G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt \quad (**)$$

$$\|$$

$$\Vert$$ ← Teorema fondamentale del calcolo int.

$$G(\varphi(t))$$

$$\Vert$$ ← perché $x = \varphi(t)$.

$$G(x)$$

Metto tutto insieme:

$$\int f(x)\,dx = G(x) \overset{(**)}{=} \int G'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{\text{usando che } x = \varphi(t).})\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Quindi, abbiamo ottenuto la seguente formula:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE.

Idea: sostituire l'argomento di f con qualcosa di più semplice: prezzo da pagare: $\varphi'(t)$.

Esempio (int. per sostituzione)

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx$$

$$t = 3x+2 \Rightarrow x = \frac{t-2}{3}$$

$$\int \frac{1}{t}\,dx \qquad \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$$

$dx \to \varphi'(t)\,dt$

$$= \left(\frac{t-2}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}\,dt$$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t|+c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+2|+c$$

$$= \ln\sqrt[3]{|3x+2|}+c$$

Esempio 2

$$\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$$

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx.$$

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\, dx = \int e^t \, dt$$

$$= e^t$$

$$= e^{\sin(x)} + c.$$

$$\parallel$$

$e^{\sin(x)} dx$ perché a mente calcolo

$$\left(e^{\sin(x)}\right)' = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

<u>Esempio</u> (Int. per parti).

$$\int \frac{(\ln(x))^3}{x} dx = \int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

Noto che $\frac{1}{x}$ è la derivata del logaritmo.
Pongo

$$z = \ln(x) \Rightarrow dz = \frac{1}{x} \cdot dx.$$

$$\int \frac{(\ln(x))^3}{x} dx = \int z^3 \cdot dz = \frac{1}{4} z^4 + c$$

$$= \frac{1}{4} (\ln(x))^4 + c.$$

Sono $\ln^4(x) = (\ln(x))^4 = \ln(x)^4$

Diverso da $\ln(x^4) = 4\ln(x)$.

<u>Esempio</u> $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Pongo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt$$

$$= \int \frac{2t}{1+t}\,dt$$

$$= \int \frac{2t+2-2}{1+t}\,dx$$

$$= \int 2\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= 2t - 2\ln|t+1| + c$$

Ricordo $t = \sqrt{x}$,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + c.$$

Affinché $\sqrt{x}$ esista, $x \geq 0$. Ma allora $\sqrt{x}+1 > 0$, $\forall x$, quindi

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

Osservazione

Considero $\int \cos(x^2)\,dx$. Sostituisco $x^2 = t$

$$\Rightarrow 2x\,dx = dt$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

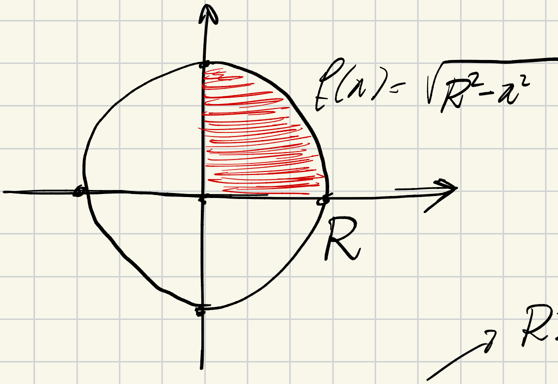
Allora

$$\int \cos(x^2)\,dx = \int \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Neppure questa si esprime tramite funzioni elementari (e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\ln(x)$). In qualche senso, si tratta di funzioni <u>intrinsecamente</u> <u>nuove</u>.

<u>Esempio</u> (di uso dell'integrazione per calcolare aree).

Calcolo l'area del cerchio:



Il cerchio di raggio R ($\to R > 0$) ha equazione

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Ricavo $y^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

Area del cerchio è 4 volte l'area sotto al cerchio nel I quadrante (quella rossa).

$$\text{Area rossa} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Tramite sostituzione, $x = R\sin(t) \Rightarrow dx = R\cos(t)\,dt$

Ottengo: per $x = 0$, $\sin(t) = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = R$, $\sin(t) = 1 \Rightarrow t = \pi/2$

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2-R^2\sin^2(t)}\,(R\cos(t))\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} R\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot R\cos(t)\,dt.$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt$$

Notare che se $t \in [0, \pi/2]$ allora $\cos(t) \geq 0$

$$= R^2\int_0^{\pi/2} \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$

Ricordo

$$\int \cos^2(t)\,dt = \frac{\cos(t)\sin(t)+t}{2}$$

dunque

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = R^2\left[\frac{\cos(t)\sin(t)+t}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=$$

$$= R^2\left(\frac{0+\pi/2}{2} - 0\right)$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{R^2 \cdot \pi}{4}$$

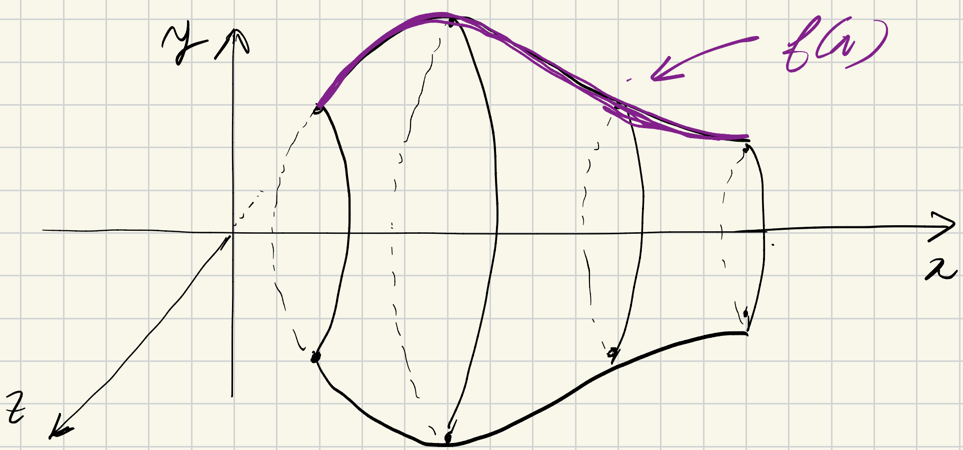
Area del cerchio è 4 volte l'area trovata,

quindi vale

$$4 \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \pi R^2.$$

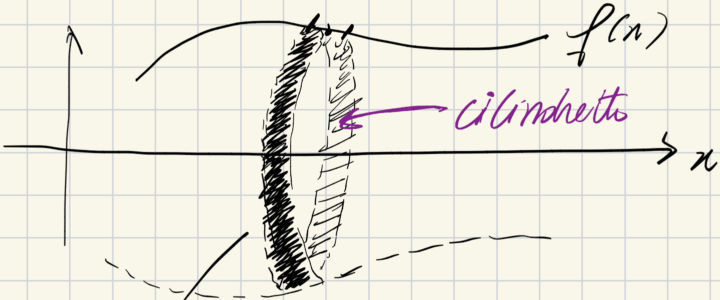
Volume di solidi di rotazione

(applicazione del calcolo integrale).



Solidi ottenuti facendo ruotare una funzione $f(x)$ attorno all'asse x. Un solido

costruito in questo modo si chiama
solido di rotazione. Dobbiamo pensarlo
come una superficie di $\mathbb{R}^3$
Scopo: Calcolare il volume di questo
solido.



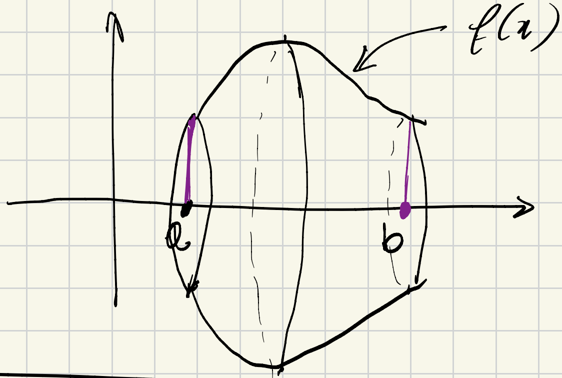
Volume: area di base per altezza del cilindretto

Cerchio di raggio
$R = f(x)$, che ha area $\pi R^2 = \pi f(x)^2$

la chiamo
dx

Volume che ottengo è $\pi f(x)^2 \cdot dx$.
Se ora ragiono come fatto per gli integrali
in $\mathbb{R}^2$, considerando quindi i limiti delle
somme dei volumi dei cilindretti per $dx \to 0$,

ho



$$\text{Volume} = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$