Criterio di diagonalizzazione:

$A \in M_{n,n}(C)$ con C un campo è diagonalizzabile se e solo se $\Longleftrightarrow$

ⓐ $p_A(x)$ abbia tutti gli zeri in C

ⓑ $m_a(d) = m_g(d)$ $\forall\, d$ autovalore di A.

Dimostrazione

"$\Longrightarrow$" Ipotesi: $A \in M_{n,n}(C)$ diagonalizzabile

Tesi: valgono ⓐ e ⓑ.

Se A è diagonalizzabile $\exists\, H \in GL_n(C)$ tale che $H^{-1}AH = D$ con D diagonale $\quad p_A(x) = p_D(x)$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } d_i \in C \;\; \forall\, i = 1, \dots, n \qquad D - x\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} d_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & d_n - x \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det(D - x\mathbb{I}_n) = (d_1 - x)(d_2 - x) \cdots (d_n - x) \quad \text{con } d_i \in C$$

quindi la condizione ⓐ è verificata.

$$A \sim \bar{D} = \begin{array}{c} \\ n_1 \end{array}\begin{pmatrix} \overbrace{e_1 \ddots e_1}^{n_1} & & & \\ & e_2 \ddots e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots\, e_k \end{pmatrix} = \qquad \begin{aligned} m_a(e_1) &= n_1 \\ m_a(e_2) &= n_2 \\ m_a(e_k) &= n_k \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 \mathbb{I}_{n_1} & & & \\ & e_2 \mathbb{I}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_k \mathbb{I}_{n_k} \end{pmatrix} \qquad e_i \neq e_j \;\text{ se } i \neq j$$

$$p_A(x) = (e_1 - x)^{n_1} (e_2 - x)^{n_2} \cdots (e_k - x)^{n_k}$$

gli autovalori sono e_i $\; i = 1, \dots, k$

$m_a(e_i) = n_i$

$$m_g(e_i) = \dim V_{e_i} = \dim \operatorname{Ker}(A - e_i \mathbb{I}_n) = \dim \operatorname{Ker}(\bar{D} - e_i \mathbb{I}_n)$$

$$m_g(e_1) = \dim \operatorname{Ker}(\bar{D} - e_1 \mathbb{I}_n) = \underline{n} - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0\,\mathbb{I}_{n_1} & & \\ & (e_2 - e_1)\mathbb{I}_{n_2} & \\ & & \ddots (e_k - e_1)\mathbb{I}_{n_k} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{n} - (n - n_1) = \cancel{n} - \cancel{n} + n_1 = n_1 = m_a(e_1)$$

Analogamente $m_g(e_i) = n-(n-n_i) = n_i = m_a(e_i)$.

"$\Longleftarrow$" Ipotesi: ⓐ e ⓑ

Tesi: A è diagonalizzabile.

Se valgono ⓐ e ⓑ

ⓐ $p_A(x) = (e_1-x)^{n_1} \cdots (e_k-x)^{n_k}$ con $e_i \neq e_j$ se $i \neq j$ e $e_i \in \mathbb{C}$.

$m_a(e_i) = n_i$ ⓑ $m_g(e_i) = n_i$

$\deg p_A(x) = n$ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

V_{e_i} B_{e_i} contiene n_i vettori

$B = B_{e_1} \cup \cdots \cup B_{e_k}$ sono vettori linearmente indipendenti

n_1 n_k B contiene $n_1 + \cdots + n_k = n$ vettori lin. ind.

$\Rightarrow B$ è base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A. $H = T_B^{\mathcal{E}}$

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} e_1 I_{n_1} & & & \\ & e_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_k I_{n_k} \end{pmatrix} = D \text{ diagonale.}$$

$\square$

Corollario: se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ ha $p_A(x) = (d_1-x)(d_2-x)\cdots(d_n-x)$ con $d_i \neq d_j$ se $i \neq j$ (tutti autovalori distinti) allora A è diagonalizzabile perché ⓐ è verificata

ⓑ $m_a(d_i) = 1 \Longrightarrow m_g(d_i) = 1$

$1 \leq m_g(d_i) \leq m_a(d_i) = 1$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 24 \\ 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 8 & 24 \\ 0 & 2-x & 18 \\ 0 & 0 & 5-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x)(5-x)$$

ⓐ è verificata $\mathbb{C} = \mathbb{R}$

$d_1 = 1$ $m_a(1) = 1 \Longrightarrow m_g(1) = 1$

$d_2 = 2$ $m_a(2) = 1 \Rightarrow m_g(2) = 1$ $\Longrightarrow A$ è diagonalizzabile.

$d_3 = 5$ $m_a(5) = 1 \Rightarrow m_g(5) = 1$

Esercizio: Si consideri la matrice A_K con K parametro reale

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4K \\ 1 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori del parametro K, A_K è diagonalizzabile?
2) Per $K=1$ determinare $H \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = D$ con D diagonale.
3) La matrice A_1 è simile alla matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 24 \\ 0 & 2 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Svolgimento.

1) Siamo in $M_3(\mathbb{R})$

PASSO 1: calcolare $P_{A_K}(x) = \det(A_K - x\mathbb{I}_3) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & 4K \\ 1 & K-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} =$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= (K-x)\det\begin{pmatrix} -x & 4K \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (K-x)(x^2-4K)$$

$K - x = 0 \Rightarrow x = K$

$x^2 - 4K = 0 \Rightarrow x^2 = 4K$

oppure

$$\det\begin{pmatrix} -x & 0 & 4K \\ 1 & K-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= -x\left((K-x)(-x)\right) + 4K(-(K-x))$$

$$= x^2(K-x) - 4K(K-x) =$$

$$= (K-x)(x^2-4K)$$

PASSO 2: determinare gli autovalori e le loro molteplicità m_a m_g

$d_1 = K$

$x^2 = 4K$ ha radici in $\mathbb{R}$ se e solo se $K \geq 0$ $\quad d_2 = 2\sqrt{K}$

$d_3 = -2\sqrt{K}$

La condizione ② del criterio è verificata se e solo se $K \geq 0$

Per studiare le molteplicità algebriche dobbiamo studiare quando $d_1 = d_2$ oppure $d_1 = d_3$ oppure $d_2 = d_3$

$d_1 = K$

$d_2 = 2\sqrt{K}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{K \geq 0}$

$d_3 = -2\sqrt{K}$

Osserviamo che $d_2 = d_3 \iff \cancel{2}\sqrt{K} = -\cancel{2}\sqrt{K} \iff 2\sqrt{K} = 0 \iff K = 0$

$d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$ $\qquad$ A_0 ha un unico autovalore 0 di

$m_a(0) = 3$ $\qquad$ $m_g(0) = \dim V_0 = \dim \operatorname{Ker}(A_0 - 0\mathbb{I}_3) =$

$$= 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Per $K=0$ ⓑ non è verificata quindi A_0 NON è diagonalizzabile.

$d_1 = K$ con $K>0$ $d_1>0$

$d_2 = 2\sqrt{K}$ $d_3<0$

$d_3 = -2\sqrt{K}$ $\Rightarrow$ certamente $d_1 \neq d_3$

Quando $d_1 = d_2$? $K = 2\sqrt{K}$ con $K>0$

$$K^2 = 4K \underset{K\neq 0}{\Longrightarrow} K=4$$

Per $K=4$

$d_1 = 4$ $m_a(4) = 2 \neq m_g(4)$

$d_2 = 4$ $m_a(-4) = 1 = m_g(-4)$

$d_3 = -4$

$$m_g(4) = \dim V_4 = \dim \ker(A_4 - 4\mathbb{I}_3) = 3 - rg\begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad = 3-2=1$$

ⓑ non è verificato $\Rightarrow$ A_4 NON è diagonalizzabile.

$$\boxed{A_K \text{ è diagonalizzabile} \Longleftrightarrow K>0 \text{ e } K\neq 4}$$

$K \in (0,4) \cup (4,+\infty)$

2) $K=1$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ determin. $H \in GL_3(\mathbb{R})$: $H^{-1}AH = D$

$d_1 = K$ $d_1 = 1$ $m_a(1) = 1 = m_g(1)$

$d_2 = 2\sqrt{K}$ $d_2 = 2$ $m_a(2) = 1 = m_g(2)$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$d_3 = -2\sqrt{K}$ $d_3 = -2$ $m_a(-2) = 1 = m_g(-2)$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$V_1 = \langle v_1 \rangle$ $V_1 = \ker(A_1 - 1\cdot\mathbb{I}_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -x+4z=0 \\ x=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_2 = \langle v_2 \rangle$ $\quad V_2 = \mathrm{Ker}(A_1 - 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -2x+4z=0 \\ x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x=2z \\ x=2z \end{cases}$ $\quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \middle| \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{-2} = \langle v_3 \rangle$ $\quad V_{-2} = \mathrm{Ker}(A_1 - (-2)I_3) = \mathrm{Ker}(A_1 + 2I_3) =$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 2x+4z=0 \\ x+3y=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-3y \\ -3y+2z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-3y \\ 2z=3y \end{cases}$

$\begin{cases} z=\frac{3}{2}y \\ x=-3y \end{cases}$

$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ \frac{3}{2}y \end{pmatrix} \middle| \ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$1 \quad 2 \quad -2$ $\qquad 1 \quad 2 \quad -2$ $\qquad K = (v_3 \ v_1 \ v_2)$

3) La matrice A_1 è simile alla matrice M?

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 24 \\ 0 & 2 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_1 \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad P_M(x) = (-2-x)(2-x)(1-x)$

$\det(M - xI_3) = \det\begin{pmatrix} -2-x & 5 & 24 \\ 0 & 2-x & 32 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$

M ha autovalori $\quad -2 \quad m_a(-2)=1=m_g(-2)$ $\quad \Rightarrow M$ verifica

$2 \quad m_a(2)=1=m_g(2)$ $\quad$ ⓐ e ⓑ del

$1 \quad m_a(1)=1=m_g(1)$ $\quad$ criterio

$M \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{matrix} A_1 \sim D \\ M \sim D \end{matrix} \Longrightarrow A_1 \sim M.$

Nota bene:

1) Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizzabile, allora $A \sim D$ con D diagonale ed una matrice $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è simile ad $A \iff$ $M \sim D$ cioè è diagonalizzabile e $P_A(x) = P_M(x)$

2) Se A è diagonalizzabile, M non è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ A non è simile a M.

$p_A(x) = p_B(x)$ abbia tutte radici reali.

Fatto: $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ sono simili tra loro $\iff$ hanno stesso $p_A(x) = p_B(x)$

$\iff$ hanno gli stessi autovalori con uguali molteplicità algebriche e geometriche.

$A, B \in M_4(\mathbb{R})$ questo non è vero

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$m_a(0) = 4$ $\qquad$ $m_a(0) = 4$

$m_g(0) = 2$ $\qquad$ $m_g(0) = 2$

A non è simile a B $\qquad$ $A \cdot A = \mathbb{O}$

$B \cdot B \neq \mathbb{O}$

Esempio: $A_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4K \\ 1 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 36 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Determinare, se esistono, tutti i valori di $K \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A_K.

Svolg. $Av = dv$ $\qquad$ $v \neq \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4K \\ 1 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4K = 6d \\ 6 - 3K = -3d \\ 6 = d \end{cases} \qquad \begin{cases} 4K = 36 \\ 6 - 3K = -18 \\ d = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 9 \\ 3K = 24 \quad K = 8 \\ d = 6 \end{cases}$$

impossibile.

Non c'è nessun valore di K.

Det. K tale che 5 sia autovalore?

$$\det(A_K - 5 I_3) = 0$$

$d_1 = K$ $\qquad$ $d_1 = 5 \Rightarrow K = 5$ $\qquad$ $K = 5$

$d_2 = 2\sqrt{K}$ $\qquad$ $d_2 = 2\sqrt{K} = 5 \Rightarrow \sqrt{K} = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $K = \frac{25}{4}$

$d_3 = -2\sqrt{K}$ $\qquad$ $-2\sqrt{K} = 5$ mai

Osservazione: se $A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \exists H \in GL_3(\mathbb{R})$: $H^{-1}AH = D$

Quanto fa A^{100}

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad D^{100} = \begin{pmatrix} d_1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{100} \end{pmatrix}$$

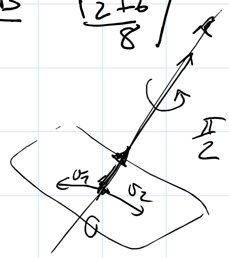
$$D^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

$H^{-1}AH = D \qquad A = HDH^{-1}$

$$A^{100} = HD\cancel{H^{-1}}\cancel{HDH^{-1}}\cancel{HDH^{-1}} \cdots \cancel{H}DH^{-1} = HD^{100}H^{-1} =$$
$$= H\mathbb{I}_3H^{-1} = \mathbb{I}_3$$

Esempio:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3\sqrt{2}+2}{8} & \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{2}+6}{8} \end{pmatrix} \qquad R \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$



Asse di rotazione $V_1 = \langle v_3 \rangle$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$P_M(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)(x^2+1) = (1-x)(x-i)(x+i)$$

In $\mathbb{C}$ è diagonalizzabile?

1
i
$-i$

$R \sim M$ in $\mathbb{C}$ $\quad R \sim M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = D \qquad D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$R^{160} = \mathbb{I}_3$$

Osservazione:

Se cerchiamo i valori di $K \in \mathbb{C}$ tali che A_K sia diagonalizzabile in $M_3(\mathbb{C})$ allora ⓐ è sempre verificata mentre la ⓑ non è verificata per $k=0$ e $k=4$

Per $k \in \mathbb{C} \setminus \{0,4\}$ $\quad d_1 = k$, $\quad d_2 = 2\sqrt{k}$, $\quad d_3 = -2\sqrt{k}$ sono diversi fra loro di $m_a = m_g = 1$ quindi A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{C} \setminus \{0,4\}$.

perché se $d_1 = d_2 \Rightarrow d_1^2 = d_2^2$ cioè $k^2 = 4k \Rightarrow k=0$ o $k=4$ già esclusi

se $d_2 = d_3 \Rightarrow d_1^2 = d_3^2$ " $k^2 = 4k \Rightarrow k=0$ o $k=4$ " "

se $d_2 = d_3 \Rightarrow \cancel{2}\sqrt{k} = -\cancel{2}\sqrt{k} \Rightarrow 2\sqrt{k} = 0 \Rightarrow k=0$ " "