Riassunto:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\quad d$ è autovalore se $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq \vec{0}$:

$$Av = dv \qquad v \text{ autovettore}$$

d è autovalore $\iff \exists\, v \neq \vec{0}$ $\quad (A - d\mathbb{I}_n)v = \vec{0} \iff$

$$Av - dv = \vec{0}$$

$\dim \mathrm{Ker}(A - d\mathbb{I}_n) \geq 1 \iff \det(A - d\mathbb{I}_n) = 0.$

$$\det(A - d\mathbb{I}_n) = P_A(d)$$

$$P_A(x) := \det(A - x\mathbb{I}_n)$$

Proposizione: d è autovalore per $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \iff$

$$P_A(d) = 0.$$

Definizione: se d è autovalore per $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora $V_d = \mathrm{Ker}(A - d\mathbb{I}_n)$ viene detto **autospazio** relativo all'autovalore d.

Si chiama molteplicità algebrica dell'autovalore d la molteplicità come zero del $p_A(x)$, $m_a(d)$

$$p_A(x) = (d-x)^{m_a(d)}\, q(x)$$

con $q(d) \neq 0$

Es: $p_A(x) = (2-x)^2 \underbrace{(1-x)}_{q(x)}$

$(2-x)(2-x)(1-x)$

Si chiama molteplicità geometrica dell'autovalore d

$m_g(d) = \dim V_d$.

Esercizio: si consideri $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ sia autovettore di f

$f\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}$ di autovalore $d = -4$.

a) Determinare $A := A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}$.

b) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità.

c) Dimostrare che esiste $H \in GL_3(\mathbb{R})$ (e determinarla) tale che $H^{-1}AH = D$ con D diagonale.

Svolgimento:

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ $\quad f(v_i) = w_i \;\; \forall i = 1,2,3$

$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{array}\right)$ Riduciamo $\left(\begin{array}{c|c} e_1 & f(e_1) \\ e_2 & f(e_2) \\ e_3 & f(e_3) \end{array}\right)$

$f(v_1)=w_1$ $\quad f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{c|c} v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{array}\right)$

$\qquad\quad v_1 \qquad w_1$

$f(v_2)=w_2$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 & -3\\ 0 & -3 & -1 & 0 & 12 & 4\end{array}\right)\rightarrow$

$\qquad\quad v_2$

$v=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ autovettore di autov. $d=-4$ $\qquad (\mathbb{I}_3 \mid A^t)$

$f(v)=dv$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}=(-4)\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$

$\qquad\quad v_3 \qquad\qquad\qquad w_3$

Riduciamo $\longrightarrow$ $\begin{array}{c}1^\circ\\2^\circ\\3^\circ+2^\circ\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 & 1\end{array}\right)\longrightarrow \begin{array}{c}1^\circ\\ \frac{1}{3}2^\circ\\ -3^\circ\end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1\end{array}\right)\longrightarrow \begin{array}{c}1^\circ-2\cdot2^\circ\\2^\circ\\3^\circ\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow f(e_1)\\ \leftarrow f(e_2)\\ \leftarrow f(e_3)\end{array}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

b) $\boxed{\text{Passo 1}}$ calcolare $P_A(x)=\det(A-x\mathbb{I}_3)$

$\begin{matrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{matrix}$

$P_A(x)=\det\begin{pmatrix}1-x & 0 & 0\\ 0 & -2-x & -6\\ 0 & -1 & -1-x\end{pmatrix}=$

$=(1-x)\left[\underbrace{(-2-x)}_{}\overset{(x+2)}{}\;\overset{(x+1)}{(-1-x)}-6\right]=$

$=(1-x)\left[x^2+2x+x+2-6\right]=(1-x)(x^2+3x-4)$

$p_A(x)=0$ se solo $1-x=0$ oppure $x^2+3x-4=0$

$x=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x=1$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$$

$x=1$

$x=-4$

$\boxed{\text{Passo 2}}$: calcolare autovalori e molteplicità.

Gli autovalori son 1 e -4 con

$m_a(1)=2$ $\qquad\qquad$ $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-6\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

$m_a(-4)=1$

Calcoliamo $m_g(1)=\dim V_1=\dim \operatorname{Ker}(A-1\cdot I_3)=$

$$=3-rg\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&-6\\0&-1&-2\end{pmatrix}=3-1=2$$

$$\begin{array}{c}3^\circ\\2^\circ-3\cdot3^\circ\\1^\circ\end{array}\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$m_g(-4)=\dim V_{-4}=\dim \operatorname{Ker}(A-(-4)I_3)=$

$$=3-rg(A+4I_3)=3-rg\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&-6\\0&-1&3\end{pmatrix}=3-2=1$$

$$\begin{array}{c}1^\circ\\3^\circ\\2^\circ+2\cdot3^\circ\end{array}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

c) Determinare H tale che $H^{-1}AH=D$ con diagonale.

Dobbiamo cercare $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ base di autovettori

$$H = T^{\mathcal{E}}_{B} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$1, 1, -4$

$d_1 = d_2 = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - \mathbb{I}_3) =$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 0=0 \\ -3y-6z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \qquad y=-2z$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$1 \qquad 1$

$$V_{-4} = \mathrm{Ker}(A + 4\mathbb{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 5x=0 \\ 2y-6z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3z \end{cases} \qquad V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$1 \quad 1 \quad -4$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{H} = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad A \sim \overline{D}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H' = \begin{pmatrix} v_1 & v_3 & v_2 \end{pmatrix} \qquad A \sim D'$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

ha autovalore 1 $m_a(1) = 2$

$$m_g(1) = \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - \mathbb{I}_2) = 2 - rg\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 - 1 = 1$$

$m_g(1) = 1 \neq m_a(1) = 2$

$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{I}_2$ non è simile ad $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 10:

Proposizione: se d_1, d_2 numeri reali $d_1 \neq d_2$ autovalori di $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

allora V_{d_1} e V_{d_2} sono in somma diretta.

Dimostrazione:

Dimostriamo $V_{d_1} \cap V_{d_2} = \{\vec{0}\}$

$V_{d_1} = \operatorname{Ker}(A - d_1\mathbb{I}_n)$ prendiamo $v \in V_{d_1} \cap V_{d_2}$

$V_{d_2} = \operatorname{Ker}(A - d_2\mathbb{I}_n)$

$v \in V_{d_1}$ $(A - d_1\mathbb{I}_n)v = \vec{0}$ $Av - d_1 v = \vec{0}$ $\begin{cases} Av = d_1 v \\ Av = d_2 v \end{cases}$

$v \in V_{d_2}$ $(A - d_2\mathbb{I}_n)v = \vec{0}$ $Av - d_2 v = \vec{0}$

$\Longrightarrow$ $d_1 v = d_2 v$, ma $d_1 \neq d_2$

$$\underbrace{(d_1 - d_2)}_{d_1 - d_2 \neq 0} v = \vec{0} \Longrightarrow v = \vec{0}.$$

$\square$

Conseguenza: se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori di A distinti cioè $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ allora

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \Rightarrow B_{\lambda_i} \text{ base di } V_{\lambda_i}$$

$B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ sono vettori lin. indipend.

Domanda 11:

Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e λ un suo autovalore

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n.$$

Dimostrazione:

Se λ è autovalore di A allora $\exists\, v \neq \vec{0}$ tale che

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = \vec{0} \Rightarrow Av - \lambda I_n v = \vec{0}$$

$(A - \lambda I_n) v = \vec{0}$ cioè $v \in V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$

essendo $v \neq \vec{0}$ $\dim V_\lambda \geq 1$ cioè $m_g(\lambda) \geq 1$

$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = K$ $\quad B_{V_\lambda} = \{v_1, \dots, v_K\}$

completiamo a base di $\mathbb{R}^n$, $B = \{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$

$H = T_B^{\mathcal{E}}$

$H^{-1}AH = A_{B,B,f}$ con $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$P_A(x) = P \quad (x) = \det(H^{-1}AH - xI_n)$

$$p_A(x) = p_{H^{-1}AH}(x) = \det(H^{-1}AH - x\mathbb{I}_n)$$

$$H^{-1}AH = A_{B,B,f} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1^\circ & 2^\circ & \cdots & k^\circ \end{array} \quad (n-k) \text{ colonne} \\ \begin{array}{c} 1^\circ \\ 2^\circ \\ \vdots \\ k^\circ \\ n-k \text{ righe} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} d & 0 & & 0 & \\ 0 & d & & \vdots & E \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ & & & d & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & F \end{array}\right) \end{array}$$

$$F \in M_{n-k,n-k}(\mathbb{R})$$

$$\det(H^{-1}AH - x\mathbb{I}_n) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} d-x & & & \\ & d-x & & E \\ & & \ddots \; d-x & \\ \hline & 0 & & F - x\mathbb{I}_{n-k} \end{array}\right) =$$

sviluppo 1° colonna

$$= \boxed{(d-x)^k \det(F - x\mathbb{I}_{n-k}) = p_A(x)} \Rightarrow m_a(d) \geq k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{c|c} 1-x & 3 \\ \hline 0 & 1-x \end{array}\right)$$

$$(1-x)^1 \det(F - x\mathbb{I}_1)$$

$m_a(d) \leq n$ perché il $p_A(x)$ ha grado n quindi ha al massimo n radici reali. □

Conseguenza: se A ha autovalore d con $m_a(d) = 1 \Longrightarrow 1 \leq m_g(d) \leq m_a(d) = 1 \Rightarrow m_g(d) = 1$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad p_{A'}(x) = (1-x)(4-x)(5-x)$

$$p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{pmatrix} = (1-x)(4-x)$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori sono

$1 \qquad ma(1)=1 \Rightarrow mg(1)=1$

$4 \qquad ma(4)=1 \Rightarrow mg(4)=1$

$V_1 = \langle \underset{1}{v_1} \rangle \qquad V_4 = \langle \underset{4}{v_2} \rangle \qquad B = \{ \underset{1}{v_1}, \underset{4}{v_2} \}$

$H^{-1}AH = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad H = (v_1, v_2)$

Domanda 12:

Teorema Criterio di diagonalizzabilità:

Sia $A \in M_{n,n}(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}})$, allora A è diagonalizzabile in $M_{n,n}(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}})$ se e solo se A verifica queste due condizioni:

ⓐ
$$\begin{cases} P_A(x) = (d_1 - x)^{n_1} (d_2 - x)^{n_2} \cdots (d_k - x)^{n_k} \\ \text{con } d_1, d_2, \dots, d_k \text{ autovalori in } \mathbb{C} - \mathbb{R}. \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n. \end{cases}$$

$P_A(x)$ ha tutte radici reali

ⓑ $\forall\, d$ autovalore di A

$$ma(d) = mg(d).$$

$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$