

Lesson 31

Esempio $f(x) = x^2$



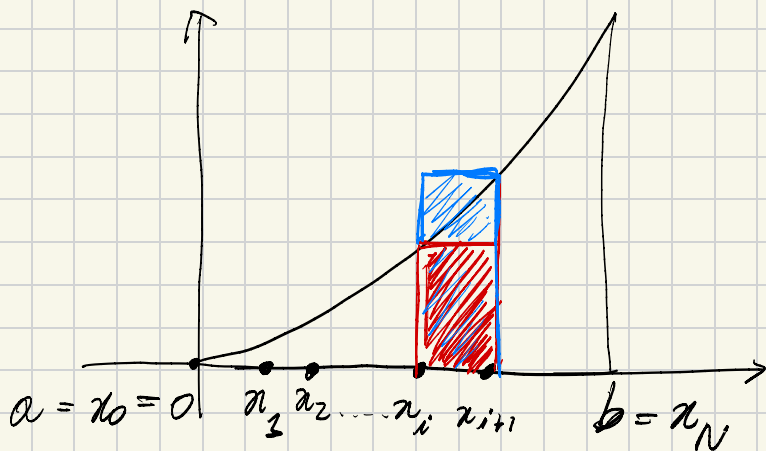
$$a = 0$$

Divido l'intervallo $[a, b]$ in N intervalli,
ciascuno di lunghezza Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{b}{N}$$



denoto l'intervallo Δx per ricordarmi che
è un intervallo sull'asse delle x .



$$x_1 = \Delta x = \frac{b}{N}$$

$$x_2 = 2\Delta x = \frac{2b}{N}$$

$$x_3 = 3\Delta x = \frac{3b}{N}$$

⋮

$$x_{N-1} = (N-1)\Delta x = \frac{N-1}{N} \Delta x$$

$$x_N = N\Delta x$$

$$\Rightarrow x_i = i\Delta x = i \frac{b}{N}$$

Calcolo f in ciascuno dei punti in cui
ho diviso l'intervallo:

$$f(x_0) = 0$$

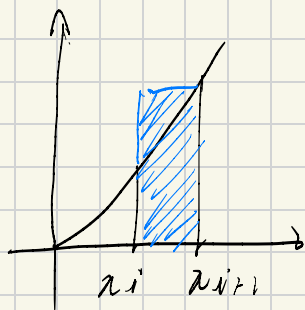
$$f(x_1) = f\left(\frac{b}{N}\right) = \left(\frac{b}{N}\right)^2$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{2b}{N}\right) = \left(\frac{2b}{N}\right)^2 = 4\left(\frac{b}{N}\right)^2$$

⋮

$$f(x_i) = (i\Delta x)^2 = i^2 \left(\frac{b}{N}\right)^2.$$

$$f(x_N) = N^2 \left(\frac{b}{N}\right)^2.$$



I due rettangoli hanno area

$$\Delta x \cdot f(x_i) = \frac{b}{N} i^2 \left(\frac{b}{N}\right)^2 = i^2 \left(\frac{b}{N}\right)^3. \quad (*)$$

$$\Delta x \cdot f(x_{i+1}) = \frac{b}{N} (i+1)^2 \left(\frac{b}{N}\right)^3 = (i+1)^2 \left(\frac{b}{N}\right)^3. \quad (**)$$

Per la definizione di integrale, devo fare la somma di queste aree, e poi il limite per $N \rightarrow \infty$.

La somma dei rettangoli in $(*)$ (rossi) è

$$\sum_{i=0}^{N-1} i^2 \cdot \left(\frac{b}{N}\right)^3 = \left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^{N-1} (i)^2$$

La somma di rettangoli in $(*)$ (blu) è

$$\sum_{i=0}^{N-1} (i+1)^2 \left(\frac{b}{N}\right)^3 = \left(\frac{b}{N}\right)^3 \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)^2$$
$$= \left(\frac{b}{N}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^N i^2$$

C'è interesse quindi calcolarla

$$\sum_{i=0}^N i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2 + N^2$$

Formula: $\sum_{i=0}^N i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

Dm. Per induzione su N

$$N=0, \quad \sum_{i=0}^0 i^2 = 0$$

$$N=1, \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

$$N=2, \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5 = 1 + 2^2$$

Assumo la formula vera per $N-1$ e la dimostro per N :

$$\sum_{i=0}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1) \cdot N \cdot (2(N-1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^N i^2 = \sum_{i=0}^{N-1} i^2 + N^2$$

IPOTESI
INDUTTIVA $\rightarrow$
$$= \frac{(N-1)N \cdot (2N-1)}{6} + N^2$$

$$= \frac{(N^2 - N)(2N-1) + 6N^2}{6}$$

$$= \frac{2N^3 - 2N^2 - N^2 + N + 6N^2}{6}$$

$$= \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

$$= \frac{N(2N^2 + 3N + 1)}{6}$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Basta allora calcolare il limite in N di questa somma, cioè

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^3 \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} =$$
$$= \frac{b^3}{6} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N+1)(2N+1)}{N^3} = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b^3}{3}.$$

Oss Basta in effetti calcolare questo limite. Le due somme che devo calcolare sono

$$\left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^{N-1} (i)^2$$

$$\left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=1}^N (i)^2$$

$$\left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)^2$$

$$\lim_N \left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^N i^2 = \frac{b^3}{3}, \text{ questo significa}$$

che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^{N-1} i^2 = \frac{b^3}{3}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^3 \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)^2 = \frac{b^3}{3}$$

Conclusione

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

In generale, come funzione di x ,

$$\int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

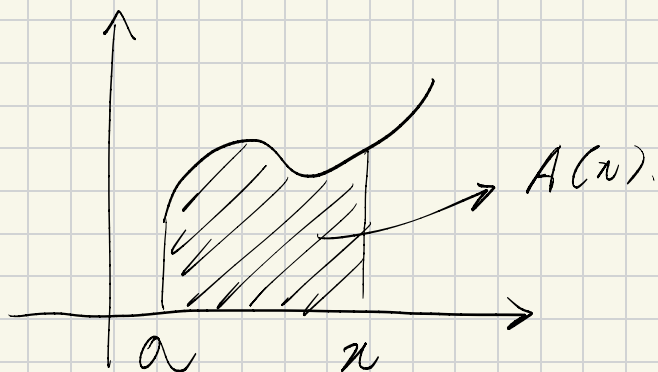
Di nuovo, notiamo

$$\left(\int_0^x x^2 dx \right)' = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,
a fissato, $x \in [a, b]$ variabile.

$A(x)$ = area della regione racchiusa
da $f(x)$, tra a e x .



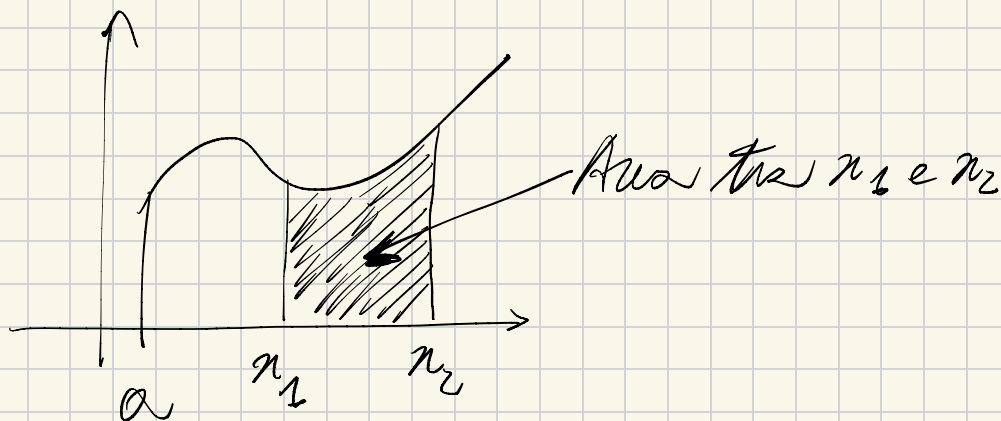
Allora

$$A'(x) = f(x)$$

cioè:

$$\left(\int_a^x f(x) dx \right)' = f(x).$$

Se ora voglio l'area compresa tra
 x_1 e x_2



che indico con $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$, allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = A(x_2) - A(x_1)$$

dove $A(x)$ è una qualunque funzione
tale che

$$A'(x) = f(x)$$

Se $A'(x) = f(x)$,

allora

$$(A(x) + C)' = f(x)$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante.

Def $A(x)$ come nel teorema è chiamata primitiva di $f(x)$, e la indico

$$A(x) = \int f(x) dx$$

Quindi: $A(x) = \int f(x) dx$ è una qualunque funzione tale che

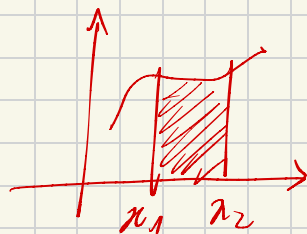
$$A'(x) = f(x).$$

Tale $A'(x)$ dipende dalla scelta di una costante.

Poi:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = A(x_2) - A(x_1)$$

è l'area della regione



e non dipende da nessuna scelta di costante: se $A(x)$ e $A(x)+C$ sono due primitive di $f(x)$,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = A(x_2) - A(x_1)$$

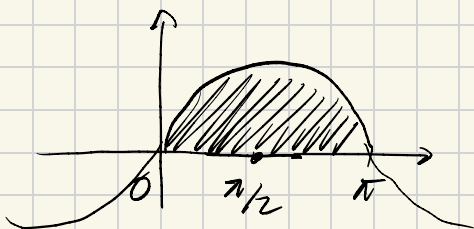
$$\downarrow$$

$$= (A(x_2) + C) - (A(x_1) + C).$$

Esempio: $f(x) = \sin(x)$.

Voglio

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$



Tutte le primitive di $\sin(x)$ sono

$$A(x) = -\cos(x) + C$$

al variare della costante C in $\mathbb{R}$,
perché

$$(-\cos(x) + C)' = -(\cos(x))'$$

$$\downarrow$$

$$= -(-\sin(x))$$

$$\downarrow$$

$$= \sin(x)$$

Sceglia $C = 0$ (perché è la più facile)

per calcolare l'area

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{\pi}$$
$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$
$$\stackrel{!}{=} 1 + 1$$
$$\stackrel{!}{=} 2.$$

Qes. Sono compattamente

$$A(x_2) - A(x_1) = \left[A(x) \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Qes

$\int f(x) dx$ simbolo, che si può interpretare come deformazione della

$$\sum f(x) \Delta x$$

($\therefore$) $\int$ simbolo dell'integrale e' ma

"5" Allungato, a ricordare il simbolo Σ di somma.

(6) da ricordare il Δx che abbiamo usato.

Calcolo delle primitive

$\int f(x) dx$ è detto integrale indefinito

$$(0) \frac{d}{dx}(x) = 1 \Rightarrow \boxed{\int 1 dx \quad \int dx = x + C.}$$

$$(1) \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}, \text{ per ogni } n \neq -1.$$

perché $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1} = x^n.$

(2) Se $n = -1$,

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

Integri, (per $x \neq 0$)

$$\text{Se } x > 0: \ln(|x|) = \ln(x),$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Se } x < 0, \ln(|x|) = \ln(-x)$$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Quindi, in entrambi i casi

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

Altre formule (da verificare per esercizio).

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Alcune regole di integrazione

Perché $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Perché $(k \cdot f(x))' = k f'(x)$, allora

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Oss Si esprime questo fatto dicendo che l'integrale, come la derivata, sono funzioni lineari.

Esempio 1

$$\int \frac{x+2}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \int dx + \int \frac{2}{x} dx$$

$$= x + C + 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$= x + C + 2(\ln(|x|) + C')$$

$$= x + 2 \ln |x| + C + 2C'$$

$C \in \mathbb{R}$ $C' \in \mathbb{R}$

$C'' = C + 2C'$

$$= x + 2 \ln |x| + C'', \quad C'' \in \mathbb{R}$$

$$= x + 2 \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x - \ln(|x+1|) + C\end{aligned}$$

notare per il momento che

$$(\ln|x+1|)' = \frac{1}{x+1}$$

per convincersene, basta notare che

$$(\ln|x+1|)' = \frac{1}{|x+1|} \cdot |x+1|', \quad (x \neq -1)$$

$$\text{ma } |x+1|' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -1 \\ -1 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

oppure, fare come fatto per $\int \frac{1}{x} dx$.

Esempio 3

$$\int \frac{x}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+1}{2x+1} dx - \int \frac{1}{2x+1} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx \right)$$

Vedo il 2 come
derivata di $2x+1$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C' \right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \ln |2x+1| + C.$$

Notare che

$$\ln |2x+1|' = \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}.$$

Come sopra, usare che

$$\ln(|2x+1|)' = \frac{1}{|2x+1|} \cdot |2x+1|'$$

$$= \frac{1}{2x+1} \cdot 2$$

Esercizio 4

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx.$$

Tuoi: scrivere $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ come

somma di $\frac{A}{x-1}$ e $\frac{B}{x+2}$ per qualche

$A, B \in \mathbb{R}$. Cioè, voglio trovare A e B tali con:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

Affinchè le due espressioni siano uguali,

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \Rightarrow B=-\sqrt[3]{3} \\ 2A-B=1 \Rightarrow 2A+A-1 \Rightarrow A=\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Poss:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C \\ &= \ln \sqrt[3]{|x-1|} - \ln \sqrt[3]{|x+2|} + C \\ &= \ln \sqrt[3]{\left| \frac{x-1}{x+2} \right|} + C \end{aligned}$$

Formula di integrazione per parti

Considero la formula della derivata di un prodotto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando (cioè, trovando una primitiva)

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))' dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Quindi:

$$\boxed{\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx}$$

Formula di integrazione per parti.

Esempio (di integrazione per parti)

$$\int x \sin(x) dx.$$

Voglio usare la formula sopra:

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx + C \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx + C \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

Diagram annotations:

- $f(x)$ points to x in the first line.
- $g'(x)$ points to $\sin(x)$ in the first line.
- $g(x) = -\cos(x)$ points to $-\cos(x)$ in the second line.

Esempio 2

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) - \int (\cos(x))' \cdot (\sin(x)) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) - \int -\sin^2(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + \int \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

Diagram annotations:

- $f(x)$ points to $\cos(x)$ in the second line.
- $g'(x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$ points to $\cos(x)$ in the second line.

Ricorda che $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, quindi

$$\int \cos^2(x) dx = \cos(x) \sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) dx$$

$$\int \cos^2(x) dx = \cos(x) \sin(x) + \int dx - \int \cos^2(x) dx$$

$$2 \int \cos^2(x) dx = \cos(x) \sin(x) + x + C$$

Segue:

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{\cos(x) \sin(x)}{2} + \frac{x}{2} + C.$$

Esempio Imitare per $\int \sin^2(x) dx$.