Lezione 30

Sviluppo di Taylor per $\log(1+x)$, per x vicino a 0.

Calcolo lo sviluppo:

$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad f(0) = 0.$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = -\dfrac{-2}{(x+1)^3} = \dfrac{2}{(x+1)^3}$ $\qquad f^{(3)}(0) = 2.$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(x+1)^4}$ $\qquad f^{(4)}(0) = -6 = -3\cdot 2.$

In generale, si mostra (facilmente) per induzione che

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{(-1)\cdot(-2)\cdots(-(n-1))}_{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}(1+x)^{-n}$$

Esercizio: assumo la formula vera per $n-1$ e la dimostro per n: ipotesi induttiva

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot\dots\cdot(-(n-2))\cdot(1+x)^{-(n-1)}$$

derivando

$$f^{(n)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot\dots\cdot(-(n-2))\cdot\underbrace{(-(n-1))\cdot(1+x)^{-n}}_{\left(\left((1+x)^{-(n-1)}\right)'\right)}$$

Sostituisco nella formula di Taylor:

$$f(x) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{f(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)}_{\overset{\parallel}{1}}\underset{\overset{\parallel}{0}}{(x-x_0)} + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}\cdot x^4 + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}x^n + \dots$$

Quindi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$$

Naturalmente, questa uguaglianza

vale solo se la serie a destra dell'= converge. Studio quindi la convergenza di questa serie. La studio con il criterio della convergenza assoluta:

Studio dove converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$$

(notare che $\left|\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$)

Criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \frac{n}{n+1} \cdot |x|.$$

Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|.$$

Perciò, per il criterio del rapporto, se $|x| < 1$, cioè $-1 < x < 1$, allora $\boxed{\text{la serie}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}\right)$ converge.

Perciò, già sappiamo che per $-1 < x < 1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots$$

Visto che la convergenza assoluta implica la convergenza della serie originale

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n} \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n} \text{ converge} \right).$$

Per $x = 1$, abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che sappiamo convergere per Leibnitz.

Quindi, anche

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Se $x < -1$, $\ln(1+x)$ non è definito.

Resta: $x > 1$, ma in quel caso la serie

$$\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

non converge. Conclusione:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{per } |x|<1$$

$x = 1.$

cioè

$-1 < x \leq 1.$

Oss

Se voglio studiare $\ln(t)$ posso farlo per t vicino a 1 tramite Taylor; cioè posso usare Taylor per $\ln(1+x)$ per x vicino a 0.

Esempio

$\frac{x^2-1}{x} = t, \quad x \to 1, \; t \to 0$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \dots$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\boxed{\ln\left(1+\frac{x^2-1}{x}\right)}}{(x-1)^2} =$$

Decido di tenere solo i primi due addendi dello sviluppo di Taylor. Se non sono sufficienti, prendo anche il terzo.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^2-1}{x} - \frac{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2}{2}}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^2-1}{x} - \frac{(x^2-1)^2}{2x^2}}{(x-1)^2} =$$

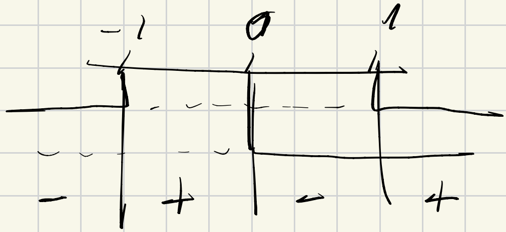
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{(x^2-1)}{x}\left(1 - \frac{x^2-1}{2x}\right)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)^2}\left(\frac{2x - x^2+1}{2x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\underbrace{x+1}_{\to 2}}{\underbrace{x}_{\to 1}\underbrace{(x-1)}_{\to 0}} \underbrace{\left(\frac{-x^2+2x+1}{2x}\right)}_{\to 1} = \pm\infty$$

Studio il segno della funzione:

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{x^2-1}{x}\right)}{(x-1)^2} \geq 0 \iff \frac{x^2-1}{x} \geq 0$$



Esempio: calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} + \cos(x) - \ln(1+x^2)}{e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \sin(x)}$$

sfruttando gli sviluppi di Taylor.

Oss. $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Se voglio calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right)$$

e approssimo $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

ottengo

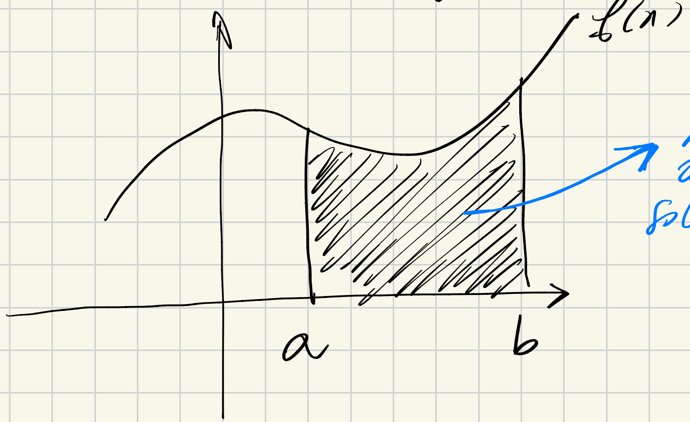
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Devo tenere almeno anche $\frac{x^3}{3!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3!}$$

Aree e integrali

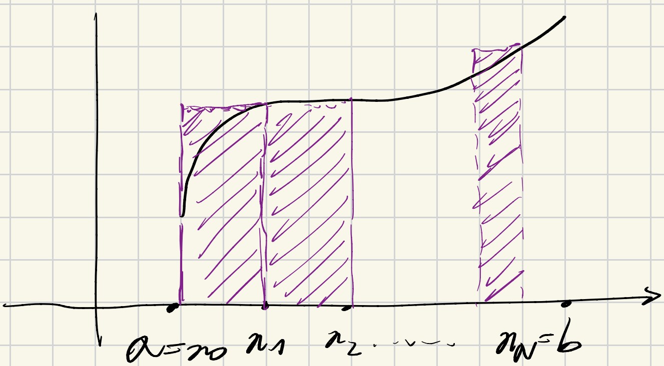
Scopo: calcolare l'area di regioni di piano delimitate da grafici di funzioni



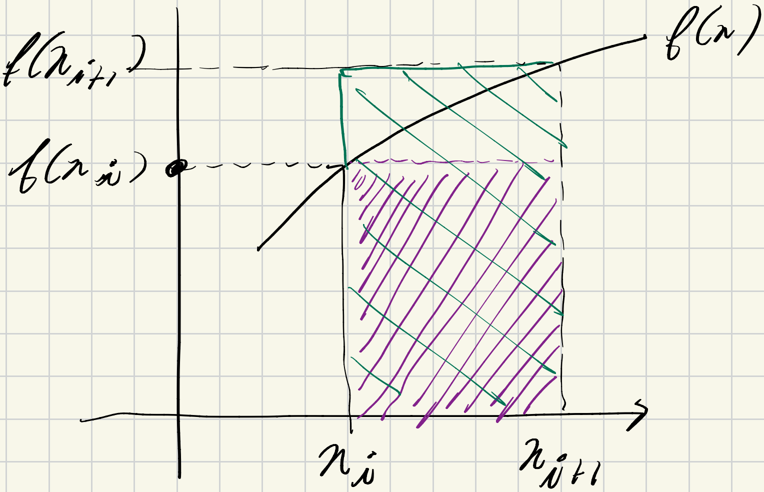
Idea: Approssimare con l'area di rettangoli e fare il limite sulla grandezza dei rettangoli

da chiarire

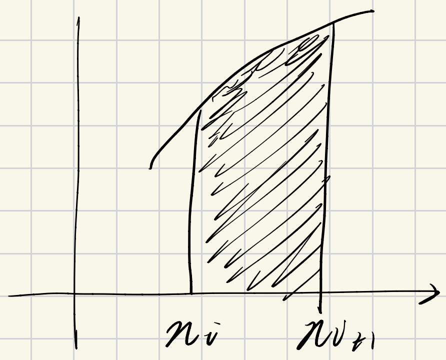
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$



Considero l'i-esimo di questi rettangoli:



L'area che mi interessa calcolare, cioè quella sotto al grafico di $f(x)$



è compresa tra l'area del rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(x_i)$

(rettangolo vicino) e quello del rettangolo con la stessa base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(x_{i+1})$. L'area A_i sotto alla $f(x)$ soddisfa allora

$$(x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i) \leq A_i \leq (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}).$$

In generale, $f(x)$ non sarà crescente in $[a,b]$, quindi devo raffinare questa idea di approssimazione.
Lo faccio ricordando che, per il teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su $[a,b]$ ammette massimo e minimo.
Indico massimo e minimo con:

$$m_i = \min \{ f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

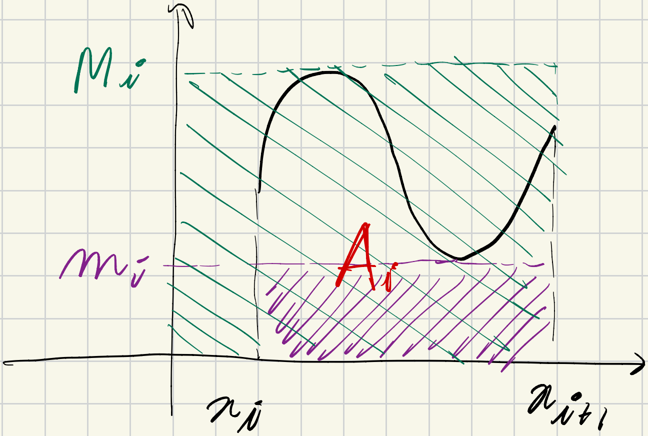
$$M_i = \max \{ f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1} \}.$$

Avrò

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad \forall\, x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Perciò

$$m_i (x_{i+1} - x_i) \leq A_i \leq M_i (x_{i+1} - x_i).$$



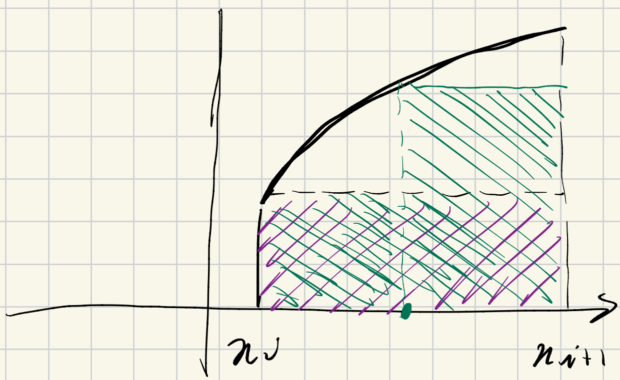
Sommo su tutti gli intervalli A_i

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_i = A = \text{area sotto a } f \text{ con base } [a,b].$$

$$(x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = b).$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \leq A \leq \sum_{i=0}^{N-1} M_i (x_{i+1} - x_i).$$

Se raffino la scelta degli intervalli $[x_{i+1}, x_i]$ (ad esempio, posso inserire un punto in mezzo a ciascuno di questi intervalli, ottenendo così due intervalli) la disequazione scritta sopra continuerà a valere anche per la nuova suddivisione, che però sarà un'approssimazione migliore del valore di A.



Chiamo ora $\boxed{\Delta_i = x_{i+1} - x_i}$.

Se prendo il lim per N (= numero degli intervalli che sto considerando) allora chiaro che $\lim \Delta_i = 0$, quindi,

m_i e M_i tendono ad essere uguali.
D'altra parte, come già notato, le disuguaglianze continuano ad essere vere, quindi

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{N-1} m_i\cdot\Delta_i\right) \leq A \leq \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{N-1} M_i\cdot\Delta_i\right)$$

Se questi due limiti sono uguali, per il teorema del confronto (teorema dei due carabinieri) entrambi sono uguali all'area A che voglio calcolare.

$$A = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{N-1} m_i\Delta_i\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{N-1} M_i\Delta_i\right).$$

Se questi due limiti

(·) esistono entrambi

(·) sono entrambi finiti

(·) sono uguali

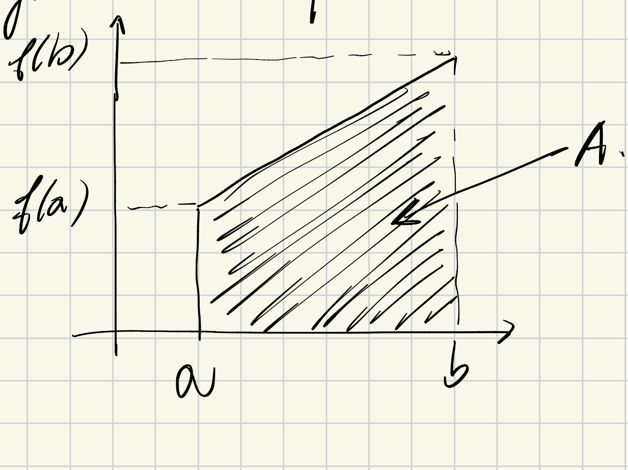
si definisce

$$A = \text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

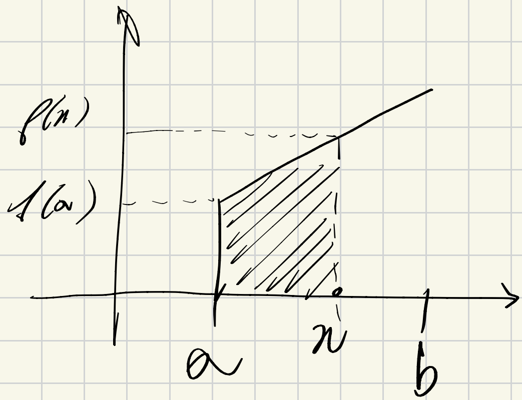
<u>Come si calcola?</u>

<u>Esempio</u> la retta

$$y = mx + q$$



Voglio: calcolare l'area compresa tra a e un punto x generico con $a \leq x \leq b$.



Calcoliamo:

$$A(x) = \frac{(f(a)+f(x))\cdot(x-a)}{2}$$

$$= \frac{(mx+q+ma+q)(x-a)}{2}$$

$$= \frac{(m(x+a)+2q)(x-a)}{2}$$

$$= \frac{m(x^2-a^2)+2q(x-a)}{2}$$

$$= \frac{mx^2+2qx-(ma^2+2qa)}{2}$$

Calcolo ora

$$A'(x) = \frac{2mx + 2q}{2} = mx + q$$

Cioè, in questo caso

$$\underbrace{\int_a^x (mx+q)\,dx}_{\text{per definizione è l'area}} = A(x)$$

notare che l'area è una funzione di x!

soddisfa l'equazione

$$\left(\int_a^x (m(x)+q)\,dx \right)' = mx+q$$

cioè, se chiamo $f(x) = mx+q$, ho

$$\left(\int_a^x f(x)\,dx \right)' = f(x).$$