Lezione 29

Concavità e convessità

Ricordo:

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{\text{valore di } f \text{ in } x_0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{differenziale di } f \text{ in } x_0 \\ \text{(si indica con } df(x_0))}}}_{\text{retta tangente al grafico di } f \text{ in } x_0.} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^3}_{\text{Rappresenta una parabola.}} + o((x-x_0)^2)$$

Esempio $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Vedo come si approssima vicino a $x_0 = 0$.

Calcolo la retta tangente

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\cdot 2$$

$$\overset{!}{=} \cos(x) - \operatorname{sen}(2x)$$

$$f(0) = \sin(0) + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}.$$

Quindi: la retta tangente al grafico in x_0 è

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \qquad (x_0 = 0)$$

$$= \underbrace{f(0)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f'(0)}_{\cos(0)-\operatorname{sen}(0) = 1.} \cdot x = \frac{1}{2} + x$$

Trovo la parabola

$$f''(x) = (\cos(x) - \operatorname{sen}(2x))'$$

$$\overset{!}{=} -\operatorname{sen}(x) - 2\cos(2x)$$

$$f''(0) = -2.$$

Parabola:

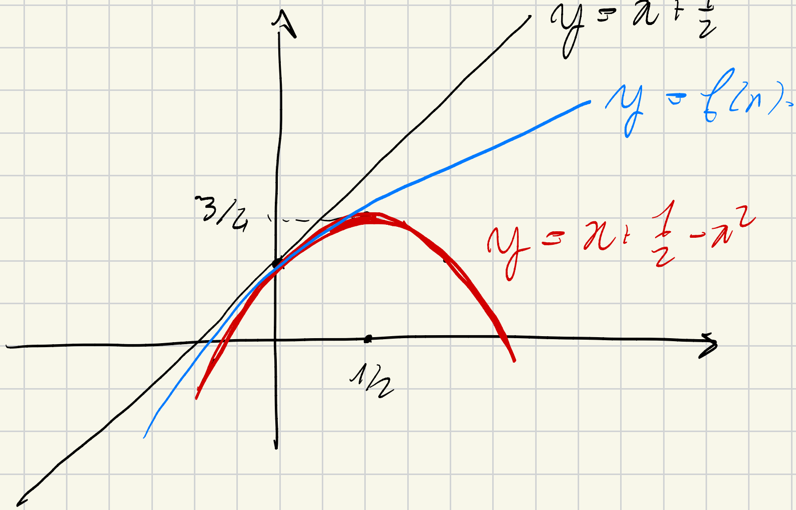
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$|$$

$$= \frac{1}{2} + x + \frac{(-2)}{2}x^2 + o(x)$$

$$= \frac{1}{2} + x - x^2 + o(x)$$

Parabola: $y = -x^2 + x + \frac{1}{2}$



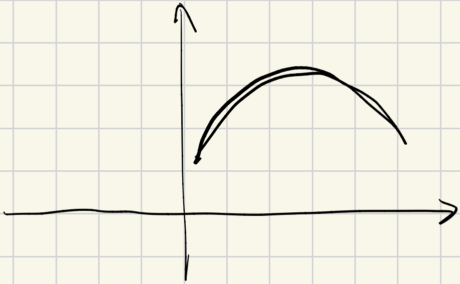
— o —

Ricordo ora che una parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

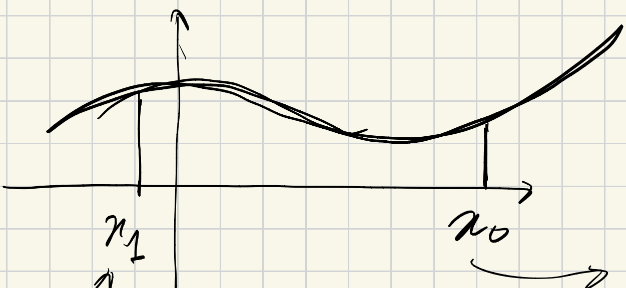
è del tipo:

Concavità verso l'alto se $a > 0$



Concavità verso il basso se $a<0$.

Perciò, se $f''(x_0)>0$ allora la concavità di f in x_0 è rivolta verso l'alto, altrimenti è verso il basso.



verso l'alto $f''(x_0)>0$

verso il basso $f''(x_0)<0$

Un punto di flesso è un punto in cui la concavità cambia verso. Se $f''(x)$ è continua in un intervallo e cambia segno in x_0, allora $f''(x_0)=0$.

Esempio Troviamo i punti di flesso della funzione

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3}.$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+3}\right)' = \frac{2(x^2+3) - 2x(\cdot 2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2+6-4x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}\right)$$

$$= \frac{-4x\cdot(x^2+3)^2 - (-2x^2+6)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

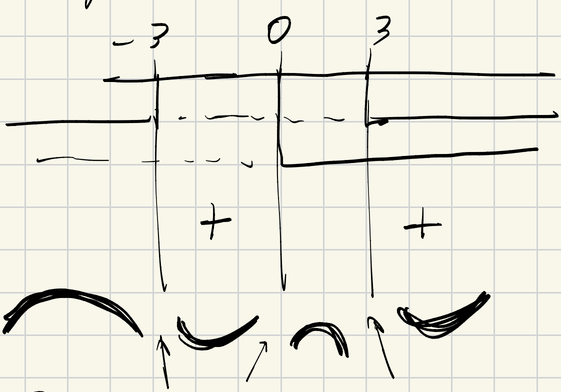
$$= \frac{\cancel{(x^2+3)}(-4x(x^2+3) - 4x(-2x^2+6))}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-4x\,(x^2+3-2x^2+6)}{(x^2+3)^3} = \frac{-4x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{4x(x^2-9)}{(x^2+3)^3} = \frac{4x(x-3)(x+3)}{(x^2+3)^3}$$

Segno derivata seconda: $f''(x) \geq 0$ per

$-3 < x < 0,\ x > 3$



Punti di flesso: $x = 0,\ x = 3,\ x = -3$

Dominio: $\mathbb{R}$

Segno $f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

Int. assi $f(x) = 0 \iff x = 0$

__A.V.__: non ci sono

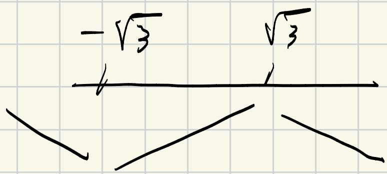
__A.O.__ $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+3} = 0$$

__Crescenza e decrescenza__

$$f'(x) = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2} \geq 0 \iff -2x^2+6 \geq 0$$

$$\iff x^2-3 \leq 0$$

$$\iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$



minimo locale in $x = -\sqrt{3}$, che vale

$$m = \frac{-2\sqrt{3}}{3+3} = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

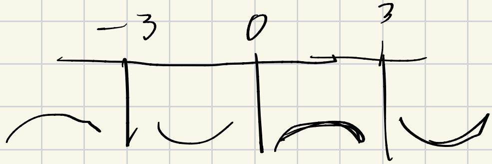
massimo locale in $+\sqrt{3}$, che vale

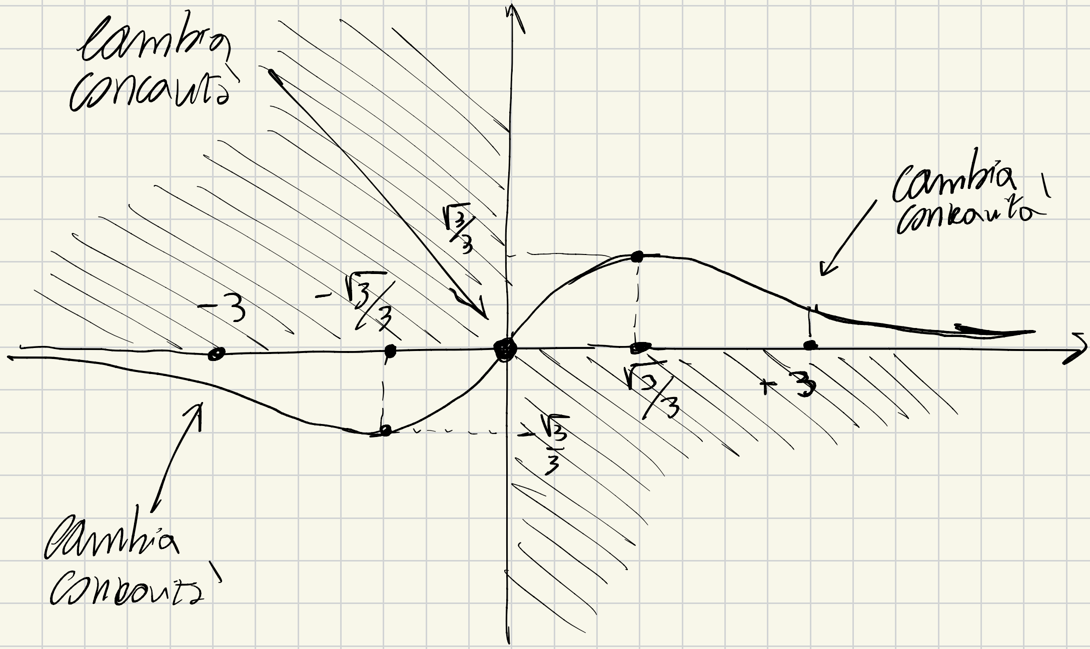
$$M = \frac{2\sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

__Simmetrie__: $f(-x) = \dfrac{-2x}{x^2+3} = -f(x)$

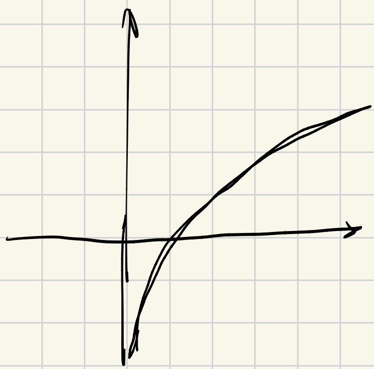
dunque f è dispari.

Convessità e concavità studiata sopra





Serie di Taylor per il logaritmo



Dominio $x>0$, $\ln(1)=0$.

Voglio calcolare lo sviluppo di Taylor di $\log(x)$ in $x_0=1$.

Ricordo:

$$f(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + $$

$$+ \frac{f^{(3)}(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \dots$$

Le potenze $(x-1)^n$ sono complicate. Quindi: Cambio variabile!

Per semplificare le espressioni, calcolo lo sviluppo in serie della funzione

$\ln(1+x)$

per $x=0$. Semplificazioni:

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{\ln(1+x)'}{1} x + \frac{\ln(1+x)''}{2} x^2 + \frac{\ln(1+x)^{(3)}}{3!} x^3 + \dots$$

così i polinomi sono più semplici.