Diagonalizzazione

Definizione: Se abbiamo una relazione di equivalenza su un insieme X, dato $A \in X$

$$[A]_\sim = \{ B \in X \mid B \sim A \}$$

Osservazione.

Sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare

siano B_1 e B_2 due basi di V

$$A = A_{B_1, B_1, f}$$

$$M = A_{B_2, B_2, f}$$

$$\begin{tikzcd}
(V, B_1) \arrow[r, "A", "f"'] \arrow[d, "T^{B_2}_{B_1}"'] & (V, B_1) \\
(V, B_2) \arrow[r, "M", "f"'] & (V, B_2) \arrow[u, "T^{B_1}_{B_2}"']
\end{tikzcd}$$

$$A = T^{B_1}_{B_2} \, M \, T^{B_2}_{B_1}$$

$$T^{B_2}_{B_1} =: H \in GL_n(\mathbb{R})$$

con $n = \dim V$

$$T^{B_1}_{B_2} = H^{-1}$$

$$\boxed{A = H^{-1} M H}$$

Definizione: due matrici A e B in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dicono **simili** $A \sim B$ se esiste una matrice invertibile $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$$H^{-1} A H = B$$

cioè A e B descrivono lo stesso endomorfismo ma in basi diverse.

$A \sim B$ $\qquad$ $\sim$ tilde

A è simile a B

Oss: ① Riflessiva $A \sim A$ $H = I_n$ $I_n^{-1} A I_n = A$

② Simmetrica se $A \sim B$ cioè $\exists$ $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$\boxed{H^{-1}AH = B}$ $\longrightarrow$ $H^{-1}A\cancel{H}\cancel{H^{-1}} = BH^{-1}$

allora $B \sim A$ perché $\cancel{H}\cancel{H^{-1}}A = HBH^{-1}$

$HBH^{-1} = A$ $\longleftarrow$ cioè $B \sim A$ perché $H^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

③ Transitiva se $A \sim B$ e $B \sim C$ allora $A \sim C$

$\underline{H^{-1}AH = B}$ $\boxed{K^{-1}BK = C}$

A C $K^{-1}H^{-1}AHK = C$

$(HK)^{-1}A(HK) = C$ perché $HK \in GL_n(\mathbb{R})$

Matrici scalari: aI_n con $a \in \mathbb{R}$

$a=1$ $I_n \sim A$ se esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$H^{-1}(I_n H) = A \Rightarrow I_n = A$ $[I_n]_\sim = \{I_n\}$

$H^{-1}H = I_n$

$aI_n \sim A$

$\underline{H^{-1}(aI_n)H = A}$ $[aI_n]_\sim = \{aI_n\}$

$a(H^{-1}I_nH) = aI_n = A$

Esercizio: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A è simile a I_2?

No perché $[I_2]_\sim = \{I_2\}$

Domanda 8:

Proposizione: se $A \sim B$ allora $\boxed{\det(A) = \det(B)}$.

Dimostrazione:

Se $A \sim B$ esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ con $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

tale che $\boxed{H^{-1}AH = B}$

$$\underline{\det(H^{-1}AH)} = \det(B)$$

$$\underline{\det(H^{-1}AH)} \underset{\text{Teorema di Binet}}{=} \det(H^{-1})\det(A)\det(H) \underset{\substack{\text{Cor. } \det(HH^{-1}) = 1 \\ = \det(H)\det(H^{-1})}}{=}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(H)}} \det(A) \cancel{\det(H)} = \det(A) \qquad \square$$

Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$

$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\mathbb{I}_2) = 1$

$\det(A) = 1 \quad \det A' = 1$

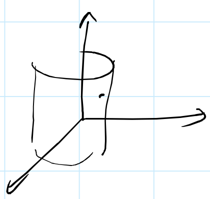
ma A non è simile a $\mathbb{I}_2$ perché $A \neq \mathbb{I}_2$

$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_2$ $\quad \det \mathbb{I}_2 = \det D = 1$

Definizione: una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice **diagonalizzabile** se $A \sim D$ con D matrice diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z/2 \end{pmatrix}.$$

cioè $\exists H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $\boxed{H^{-1}AH = D}$

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$A = A_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n, f}$ se A è diagonalizzabile

$A \sim D$ esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $\boxed{H^{-1} A H = D}$

$$\begin{matrix} B & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & B \end{matrix}$$

$D = A_{B,B,f}$ $\quad \boxed{H = T_B^{\mathcal{E}}}$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad B = \{ v_1, \dots, v_n \}$$

v_1 $\quad f(v_1) = d_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 v_n = d_1 v_1$

v_2 $\quad f(v_2) = 0 v_1 + d_2 v_2 + 0 v_3 + \dots = d_2 v_2$

$\vdots$

$f(v_n) = d_n v_n$

$$\begin{cases} f(v_1) = d_1 v_1 \\ f(v_2) = d_2 v_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = d_n v_n \end{cases}$$

Definizione:

Dato $f: V \to V$ endomorfismo uno scalare $d \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore di f** se esiste un vettore $v \in V$ $v \neq \vec{0}$ tale che

$$\boxed{f(v) = d v}$$

il vettore v si dice **autovettore di f relativo all'autovalore d.**

Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, uno scalare $d \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore di A** se esiste un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $v \neq \vec{0}$ tale che

$$\boxed{A v = d v}$$

il vettore v si dice **autovettore di A relativo all'autovalore d.**

Esercizio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verificare che 0 e 3 sono autovalori di A.

Svolg.: 0 è autovalore di A se esiste $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\boxed{v \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$

$\boxed{Av = 0v}$ cioè $Av = \vec{0}$ $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$ $z=-x-y$ $\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}A = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} \rangle$ $\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}$ sono autovettori di autovalore 0

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $Av = \vec{0} \Rightarrow 0$ è autovalore

Dimostrare che $\exists\, v \neq \vec{0} : Av = 3v$ $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x+y+z=3x\\x+y+z=3y\\x+y+z=3z\end{cases}$

$\begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$ $\begin{cases}-4y+2z+y+z=0\\x=2y-z\\2y-z+y-2z=0\end{cases}$ $\begin{cases}-3y+3z=0\\x=2y-z\\3y-3z=0\end{cases}$

$\begin{cases}y=z\\x=2z-z=z\end{cases}$ $\left\{\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\} = \langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \rangle$ $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 3.

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^3$, è base di autovettori

$T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ $A \sim D = \begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$

$0 \quad 0 \quad 3$

$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

0 $Av = 0 \cdot v$ con $v \neq \vec{0}$ $\boxed{Av = \vec{0}}$ $v \in \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} \rangle$

3 $Av = 3 \cdot v$ con $v \neq \vec{0}$ $\boxed{Av = 3v}$ $v \in \langle v_3 \rangle = \langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \rangle$

$$B = \{ v_1, v_2, v_3 \} \qquad D = A_{B,B,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$\quad\;\; 0 \quad 0 \quad 3$

$$f(v_1) = 0 v_1 = 0 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$
$$f(v_2) = 0 v_2 = 0 \cdot v_1 + 0 v_2 + 0 v_3$$
$$f(v_3) = 3 v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 v_2 + 3 v_3$$

$$A \sim D \qquad H = T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

B base di autovettori

$A \sim D$

$$\bar{B} = \{ v_3, v_1, v_2 \} \qquad \bar{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad\;\; 3 \quad 0 \quad 0$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \{ v_1, v_3, v_2 \}$$
$\quad\;\; 0 \quad 3 \quad 0$

$$-(\bar{0}) = \emptyset = d \cdot \vec{0} \qquad \rightarrow$$

Osservazione:

$$f(v) = d v \qquad\qquad A v = d v \qquad \boxed{\text{con } v \neq \vec{0}}$$
$$f(v) = d \, id_V(v) \qquad\qquad A v = d \mathbb{I}_n v$$
$$f(v) - d \, id_V(v) = \vec{0}$$
$$(f - d \, id_V)(v) = \vec{0} \qquad\qquad (A - d\mathbb{I}_n) v = \vec{0}$$
$$v \in \operatorname{Ker}(f - d \, id_V) \qquad\qquad v \in \operatorname{Ker}(A - d\mathbb{I}_n) \quad \text{con } v \neq \vec{0}$$

se e solo se $\det(A - d\mathbb{I}_n) = 0$

Definizione:

Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si chiama polinomio caratteristico di A

$$\boxed{P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{A - x\mathbb{I}_3} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & x & -x \end{pmatrix} =$$

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & x & -x \end{pmatrix} =$$

$$= -x\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - x\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= -x(\cancel{1}-x\cancel{-1}) - x(\cancel{1}-2x+x^2\cancel{-1}) = x^2+2x^2-x^3 = -x^3+3x^2$$

$$= x^2(3-x)$$

$$P_A(x) = -x^3+3x^2 = x^2(3-x) \qquad \begin{matrix} x=0 \\ x=0 \\ x=3 \end{matrix}$$

Definizione: dato $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo, fissiamo $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora si dice **polinomio caratteristico di f**

$$\boxed{P_f(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)} \qquad \text{con } A = A_{B,B,f}.$$

Domanda 9:

Proposizione: se $A \sim B$ con $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora

$$P_A(x) = P_B(x).$$

Dimostrazione:

Se $A \sim B$ allora $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$$H^{-1}AH = B$$

$$P_B(x) = \det(B - x\mathbb{I}_n) = \det(H^{-1}AH - x\mathbb{I}_n) = \dots$$

$$= \det(H^{-1}AH - H^{-1}(x\mathbb{I}_n)H) = \det(H^{-1}(A - x\mathbb{I}_n)H) =$$

$$= \cancel{\det(H^{-1})}\det(A - x\mathbb{I}_n)\cancel{\det(H)} = \det(A - x\mathbb{I}_n) = P_A(x)$$

Teorema di Binet

perché $\det(H^{-1})\det(H) = \det(\mathbb{I}_n) = 1$

$$P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$$

$\square$.

Controes:

$$\mathbb{I}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad P_{\mathbb{I}_2}(x)=\det\begin{pmatrix}1-x&0\\0&1-x\end{pmatrix}=(1-x)^2$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix} \qquad P_A(x)=\det\begin{pmatrix}1-x&3\\0&1-x\end{pmatrix}=(1-x)^2$$

però A non è simile a $\mathbb{I}_2$ perché $A\neq\mathbb{I}_2$ $[\mathbb{I}_2]_n=\{\mathbb{I}_2\}$.

Esercizio:

Le matrici $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\qquad \det(A)=-1$

$$P_A(x)=\begin{pmatrix}1-x&0\\0&-1-x\end{pmatrix}=(1-x)(-1-x)=$$

$$=x^2-1=x^2+0\cdot x-1$$

$$B=\begin{pmatrix}3&5\\-1&-2\end{pmatrix} \qquad \det B=-6+5=-1$$

$$P_B(x)=\det\begin{pmatrix}3-x&5\\-1&-2-x\end{pmatrix}=(3-x)(-2-x)+5=$$

$$=-6+2x-3x+x^2+5=x^2-x-1\neq P_A(x)$$

$\longrightarrow$ A non è simile a B perché $P_A(x)\neq P_B(x)$

$$P_A(x)=\det\begin{pmatrix}a_{11}-x & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-x\cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{n1}\cdots & & a_{nn}-x\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}a-x&b\\c&d-x\end{pmatrix}=\underline{(a-x)(d-x)}+\cdots$$

$$=\underline{(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)}+\cdots\cdots$$

$$=(-1)^n x^n+(a_{11}(-x)^{n-1}+a_{22}(-x)^{n-1}+\cdots+a_{nn}(-x)^{n-1})+\cdots$$

$$=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x^{n-1}+\cdots$$

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad tr A=0 \qquad P_A(x)=x^2-tr(A)x+\det(A)$$

$$P_A(x)=x^2-1$$

$p_A(x) = x^2 - 1$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad tr B = 1 \quad$ $p_B(x) = x^2 - tr(B)x + det(B)$

$= x^2 - x - 1.$

Oss: se $trA \neq trB$ allora A non è simile a B.