# Lezione 28

## Teorema del l'Hospital

Supponiamo di avere un limite nella F.I. $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili.
Suppongo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ esista.

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dim. Nel caso $\frac{0}{0}$:

In questo caso, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Calcolo il limite così:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

uso che $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

moltiplico e divido per $x-x_0$

So che entrambi i limiti esistono

$\blacksquare$

<u>Esempio</u>

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cosh(x)}{x^2}\right)$$

Lo calcolo prima con sviluppi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)\right)}{x^2}$$

Ricordare lo sviluppo di $\cosh(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}-\dots}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Voglio ricalcolare lo stesso limite con de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cosh(x)}{x^2}\right) \overset{(H)}{=} \qquad \left[F.I.\ \frac{0}{0}\right]$$

Vale solo se le derivate esistono

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sinh(x)}{2x}$$

Ora, ho ancora una F.I. del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Riapplico de l'Hôpital:

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cosh(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

<u>Oss.</u> Dopo due applicazioni del teorema

di de l'Hospital ho ottenuto un valore limite di $\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$; quindi $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Poiché $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, allora (seconda applicazione del teorema di de l'Hospital)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

<u>Es.</u> $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}$$

F.I. $\frac{0}{0}$ F.I. $\frac{0}{0}$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Risolvendo con due applicazioni del t. de l'Hospital come previsto concludo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}.$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Segno $f(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

Int. assi: $f(x) = 0 \iff x = 1$

$f(0) = -1/3$.

A.O. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0^{\pm}$

A.V. Non ce ne sono.

Derivata:
$$\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' = \frac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff -x^2+2x+3 \geq 0$$

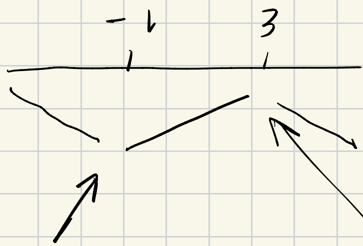
$$\iff x^2-2x-3 \leq 0$$

$$\iff (x-3)(x+1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 3$$

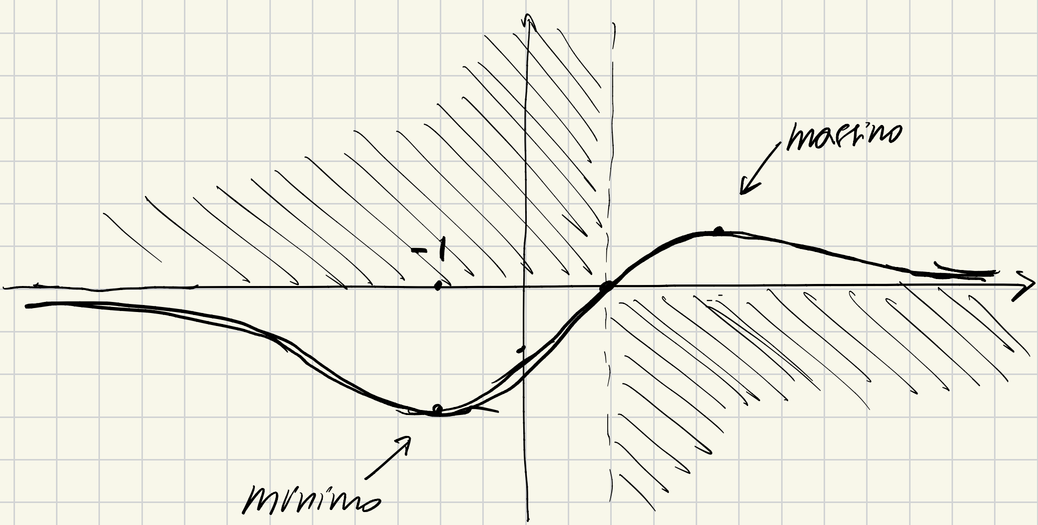
Perciò $f(x)$ è crescente per $-1 \leq x \leq 3$

$f(x)$ è decrescente per $x \leq -1$, $x \geq 3$




minimo in $x=-1$ che vale $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Massimo per $x = 3$ che vale $f(3) = \frac{1}{6}$.



# Derivate di ordine superiore e formula di Taylor

Ricordo: Se $f(x)$ è derivabile in $x_0$, ho

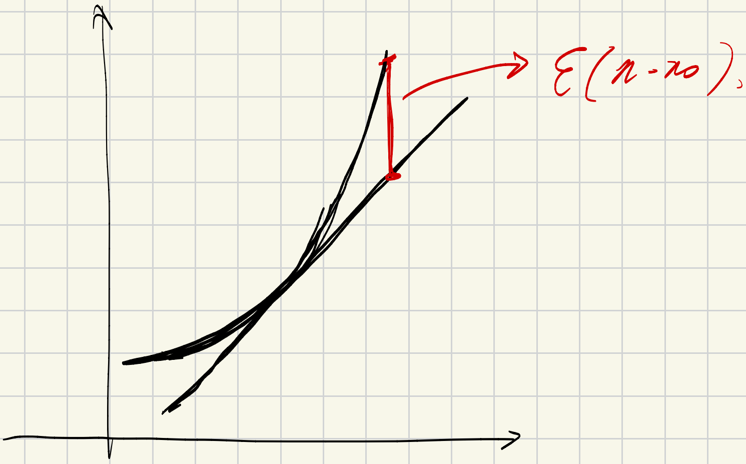
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Retta tangente al grafico di } f(x) \text{ in } x_0.} + \underbrace{\varepsilon(x-x_0)}_{\text{termine d'errore, di cui sappiamo}}$$

$\varepsilon(x-x_0) = o(x)$

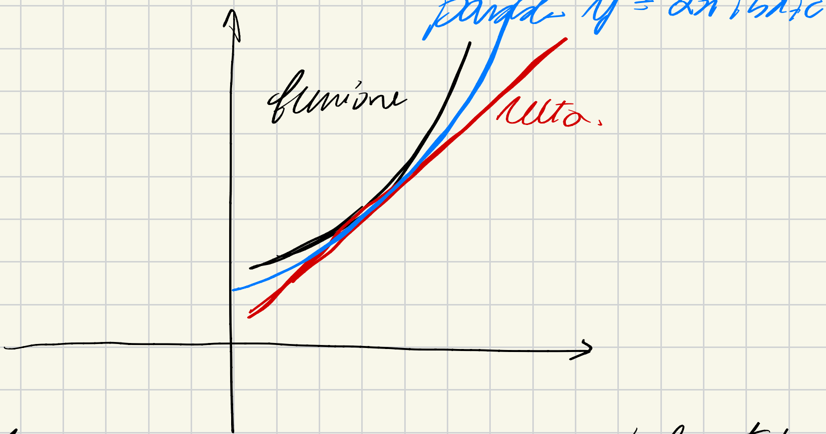
che significa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Dico che $\varepsilon(x-x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x$



E se approssimassimo con parabole?




Vogliamo cercare espressioni del tipo

$$(*)\ f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

Vediamo chi dovrebbero essere gli $a_i$ per avere un'espressione di tipo $(*)$:

Da $(*)$, derivando, ho:

$$f'(x) = a_1 + \underbrace{2a_2(x-x_0)}_{\to 0 \text{ per } x\to x_0} + \underbrace{3a_3(x-x_0)^2}_{\to 0 \text{ per } x\to x_0} + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0) = a_1.$$

Continuo calcolando $f''(x)$:

$$(f'(x))' = 2a_2 + 6a_3\cdot(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Continuo con un'altra derivazione

(in generale, $f^{(n)}(x)$ = n-esima derivata di $x$

cioè $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$)

$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = \left(2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots\right)'$$

$$= 6a_3 + 24a_4(x-x_0) + \dots$$

$$f^{(3)}(x_0) = 6a_3 = 3!\,a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

Continuando in questo modo si dimostra (per induzione: esercizio) che se vale

$$(*): \quad f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

allora

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$$

Quindi: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Abbiamo un candidato:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

<u>Teorema di Taylor</u>: Se $f$ è una funzione derivabile $n$ volte in $x_0$, allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0^n) + o(x-x_0)^n$$

dove $o(x-x_0)^n$ significa che il termine d'errore (stessa notazione usata per $n=1$ sopra).

$$E_n(x-x_0) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

Verifica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Oss Questo significa che il termine d'errore $\varepsilon_n(x-x_0)$ che otteniamo approssimando $f(x)$ con $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (che in effetti è un polinomio di grado $n$) è più piccolo di $(x-x_0)^n$, dove "è più piccolo" significa $\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Se esiste $f^{(n)}(x)$ per ogni $n \geq 0$, allora posso sviluppare $f(x)$ in serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(posto che la serie sopra converga), dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. (notazione).

**Esempio** Sviluppo di $\text{sen}(x)$ in $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos(x) \qquad f'(0) = 1$$
$$f^{(2)}(x) = -\text{sen}(x) \qquad f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \qquad f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x) \qquad f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = +\cos(x) \qquad f^{(5)}(0) = +1$$

eccetera.

Notiamo che $f^{(j)}(x) = f^{(j+4)}(x)$

Sostituendo nella formula di Taylor

$$\sin(x) = \underbrace{0}_{\sin(0)} + \underbrace{\frac{1}{1}}_{\frac{\cos(0)}{1!}} \cdot \underbrace{x}_{(x-0)} + \underbrace{0}_{-\sin(0)} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \dots$$

In definitiva:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

**Attenzione** Questo sviluppo in serie ha senso perché la serie

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

converge per ogni $x$ con $|x|<1$, per il criterio di Leibnitz (esercizio).

## Altri sviluppi in serie

(•) $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ (esercizio)

(•) $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$ (esercizio)

(•) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ (esercizio).

(•) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

Oss Per questi tre esercizi, imitare quanto fatto per $\sin(x)$.

Oss. Dallo sviluppo in serie di $e^x$, $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$ risulta che

$$e^x = \sinh(x) + \cosh(x)$$

cosa che in effetti già avevamo notato.

Oss. Notare che l'esercizio sull'esponenziale è più facile degli altri:

Infatti: $(\exp^{(n)})(x) = \exp(x) = e^x$.

quindi la sostituzione nella formula di Taylor è immediata

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\exp^{(n)}(0))}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Oss. Tutti gli sviluppi in serie che ho scritto sopra hanno tutti senso perché tutte le serie che ho scritto convergono, anche assolutamente.

## Esponenziale complesso

**Domanda**: Cosa succede se nell'espressione

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

al posto di $x \in \mathbb{R}$ considero uno $z \in \mathbb{C}$?

**Esempio**: Cosa succede se $z = i \cdot t$ con $t \in \mathbb{R}$?

Sostituisco formalmente nella serie

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \dots$$

Sappiamo

$$\left.\begin{aligned} i &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= +1 \end{aligned}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ i^8 &= 1 \end{aligned}\right]$$

e così via. Quindi, sostituendo

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + 1\cdot\frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - i\frac{t^7}{7!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots\right)$$

Quindi:

$$\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)}$$ FORMULA DI EULERO

Se ora $z = a + ib$ è un qualunque numero complesso, dove $a, b \in \mathbb{R}$, allora

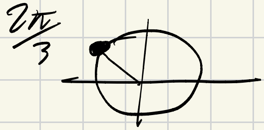
$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

$$= e^a \cdot (\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b))$$

$$\boxed{e^z = e^a \cdot (\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b))}$$

Esempio: $z = \frac{2\pi}{3}(1+i) = \frac{2\pi}{3} + i \cdot \frac{2\pi}{3}$.

$a = \frac{2\pi}{3}, \quad b = \frac{2\pi}{3}$




$$e^z = e^{\frac{2\pi}{3}(1+i)} = e^{\frac{2\pi}{3}} \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$= e^{\frac{2\pi}{3}} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right).$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{2\pi}{3}} + i \frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{2}.$$