

MATEMATICA (Scienza dei Materiali)

1º Compitino — 15 novembre 2025

---

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare la cui matrice (nelle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ove  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro.

- (a) Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle righe di  $A$ . Determinare la dimensione e una base di  $U$  al variare del parametro  $\alpha$ .
- (b) Poniamo  $\alpha = -3$ . Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Ora poniamo  $\alpha = 0$  e consideriamo il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinare per quale valore di  $\beta$  il sistema ha soluzioni e, per tale valore di  $\beta$ , trovare tutte le soluzioni.

- (d) Si dica se esistono valori di  $\alpha$  per cui  $f$  è iniettiva o suriettiva.

**Esercizio 2.** Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 - 2n + 8})$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - n + 5} - \ln(n^5 + 2)}{n + 2}$$

**Esercizio 3.** Determinare se le seguenti serie convergono:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3 + 5}}{\ln(n) + \sqrt{n^3 - n}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2n + 3}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

**Esercizio 4.** Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

**Esercizio 5.** Determinare dominio, segno, eventuali simmetrie, eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui e i limiti agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x) = \ln \left( \frac{x^2 - 4}{x^2} \right)$$

$$(b) f(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x}}$$