

MATEMATICA (Scienza dei Materiali)
1° Compitino — 15 novembre 2025

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (nelle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

- (a) Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dalle righe di A . Determinare la dimensione e una base di U al variare del parametro α .
- (b) Poniamo $\alpha = -3$. Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (c) Ora poniamo $\alpha = 0$ e consideriamo il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinare per quale valore di β il sistema ha soluzioni e, per tale valore di β , trovare tutte le soluzioni.

- (d) Si dica se esistono valori di α per cui f è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 - 2n + 8})$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - n + 5} - \ln(n^5 + 2)}{n + 2}$

Esercizio 3. Determinare se le seguenti serie convergono:

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3 + 5}}{\ln(n) + \sqrt{n^3 - n}}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2n + 3}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$

Esercizio 4. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Esercizio 5. Determinare dominio, segno, eventuali simmetrie, eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui e i limiti agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$
- (b) $f(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x}}$