



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

Critica alla teoria monodimensionale

Corso di Macchine 1

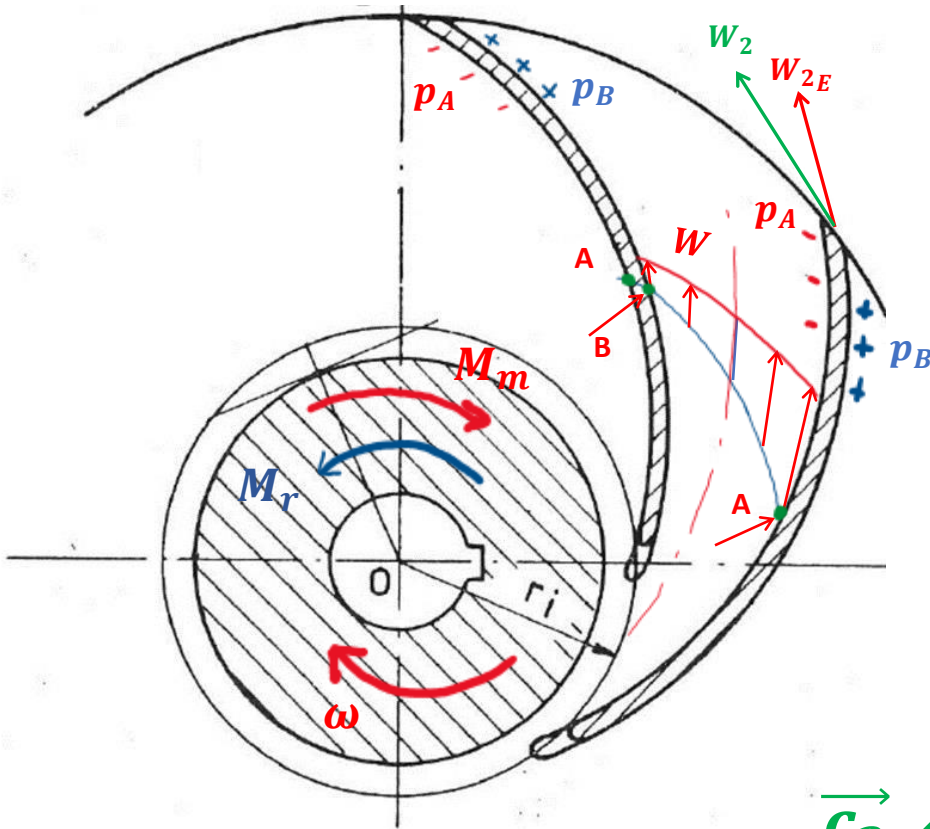
Agenda

- ▶ Riepilogo: cosa dice la Teoria Monodimensionale o Euleriana?
- ▶ Critica alla teoria Euleriana
- ▶ Deviazione della corrente relativa



Critica alla teoria Euleriana

Critica alla teoria euleriana

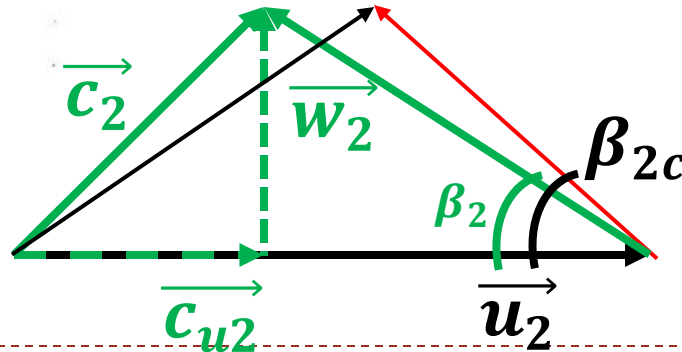


$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_B - p_A}{\rho}$$

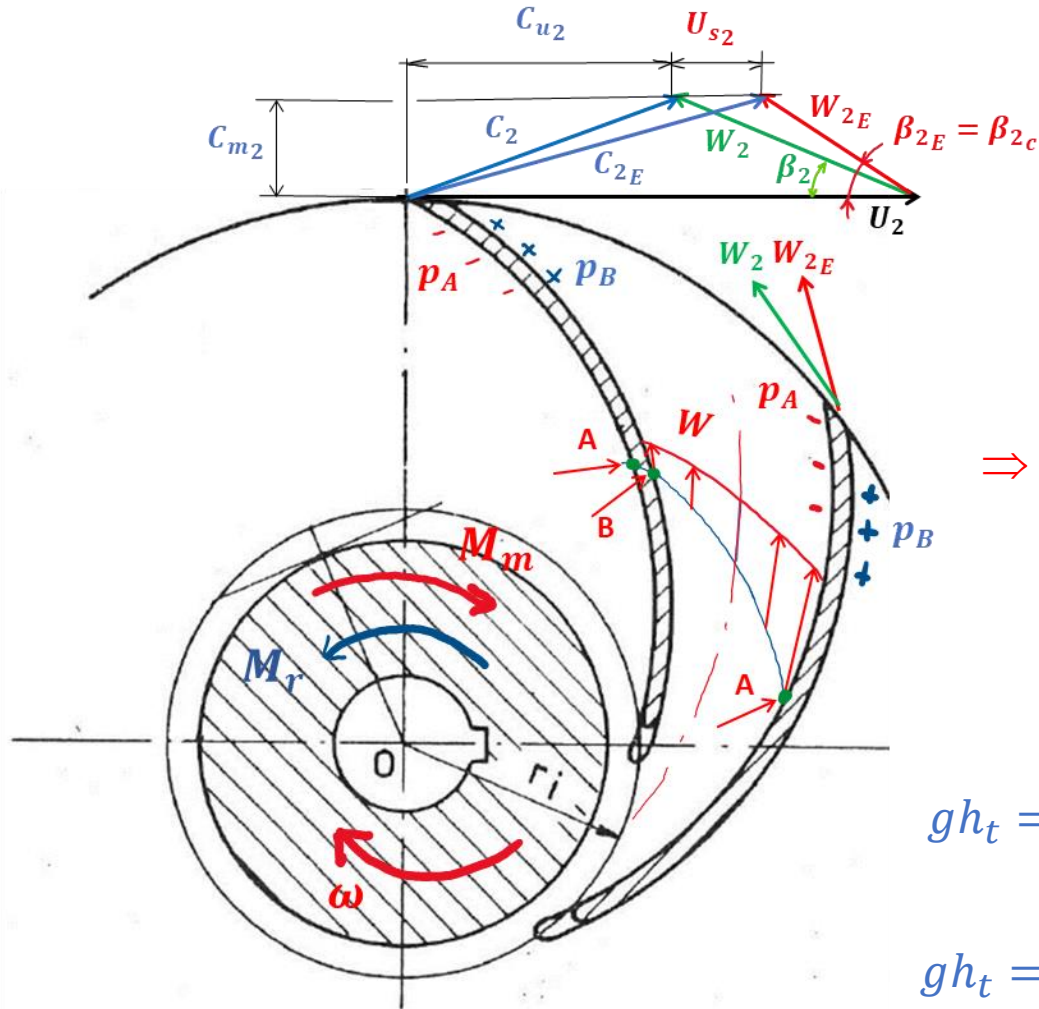
$$\frac{\Delta W^2}{2} = \frac{W_A^2 - W_B^2}{2}$$

⇒ Per effetto del gradiente circonferenziale di pressione $\partial p / \partial \vartheta$, la velocità relativa W_2 all'uscita della girante viene deviata rispetto alla direzione definita dall'angolo β_{2c} delle pale

$$\beta_2 < \beta_{2c}$$



Critica alla teoria euleriana



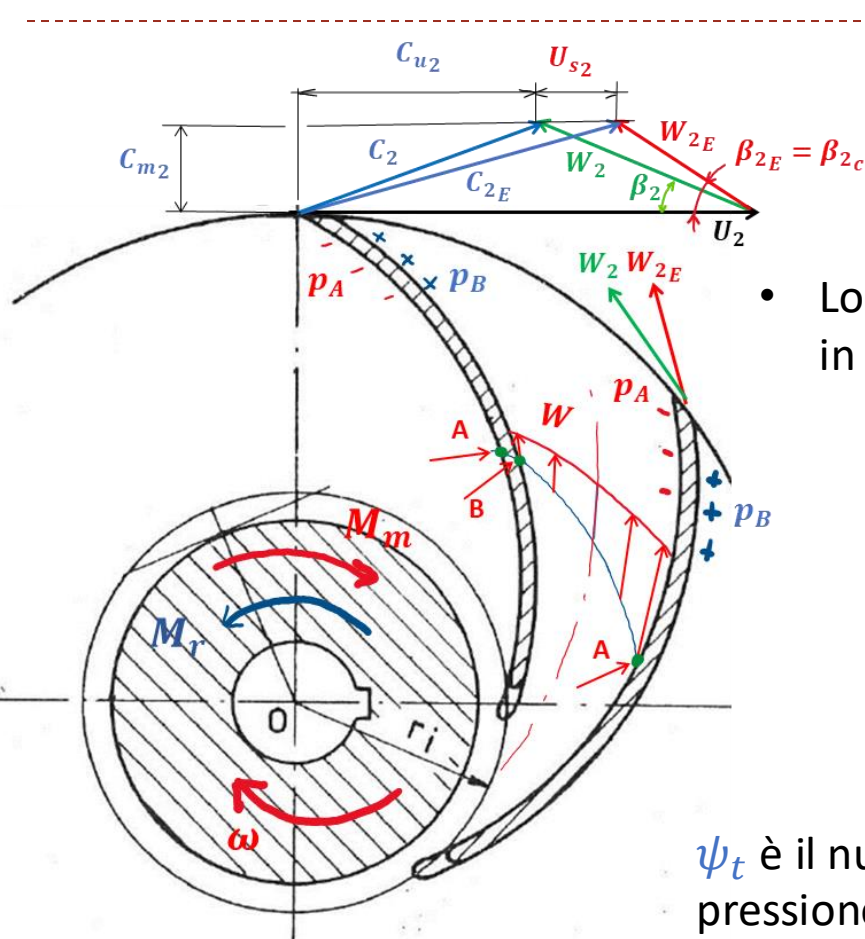
La velocità relativa W_2 subisce uno scorrimento U_{s2} in direzione contraria a U_2

⇒ Ne consegue una riduzione della componente C_{u2} e quindi dello scambio di energia gh_t rispetto al valore euleriano $gh_{t,E}$:

$$gh_t = U_2 (C_{u2E} - U_{s2}) = U_2 C_{u2} < gh_{t,E}$$

$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}) < gh_{t,E}$$

Critica alla teoria euleriana



$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})$$

Come quantificare?

- Lo scambio energetico si può rappresentare anche in forma adimensionale:

$$\frac{gh_t}{U_2^2} = \frac{U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})}{U_2^2}$$

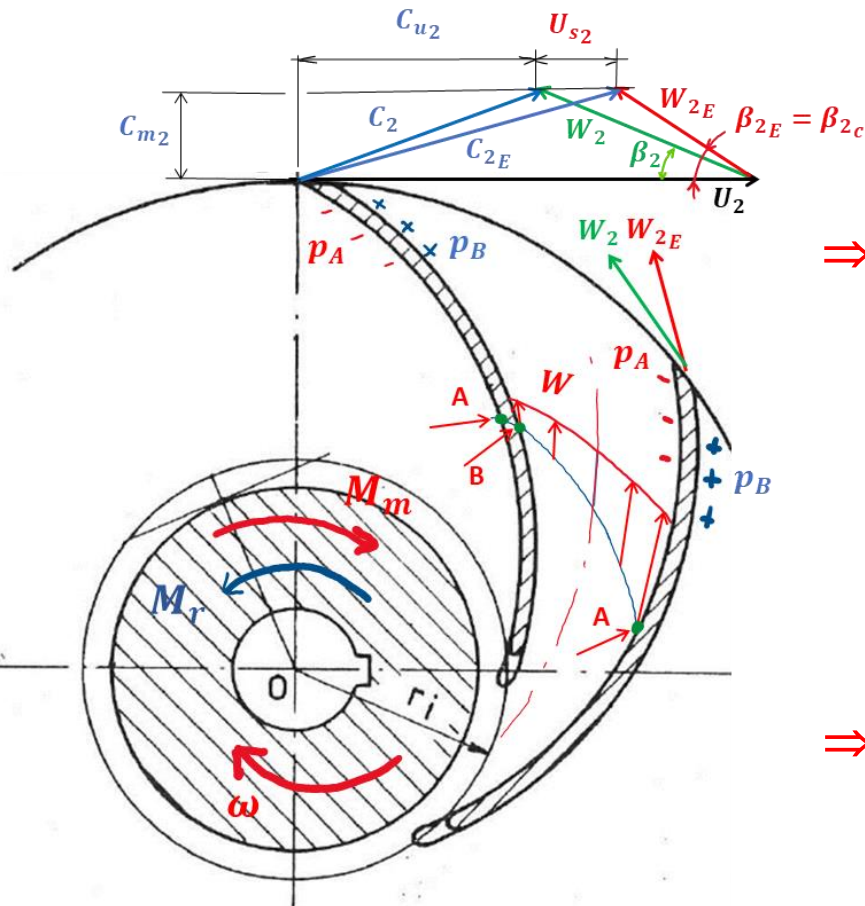
$$\frac{gh_t}{U_2^2} = 1 - \frac{C_{m2}}{U_2} \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

ψ_t è il numero di pressione teorico

ϕ il numero di flusso

$$\psi_t = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

Critica alla teoria euleriana



$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

⇒ In conclusione, da queste essenziali considerazioni risulta che lo scorrimento della corrente relativa U_{s2}/U_2 è **funzione diretta** dell'angolo β_{2c} e **funzione inversa** del numero di pale Z della girante:

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = f\left(\beta_{2c}, \frac{1}{Z}\right)$$

⇒ Tutte le correlazioni suggerite per la determinazione di U_{s2}/U_2 dovranno risultare coerenti con questo risultato

Deviazione della corrente relativa

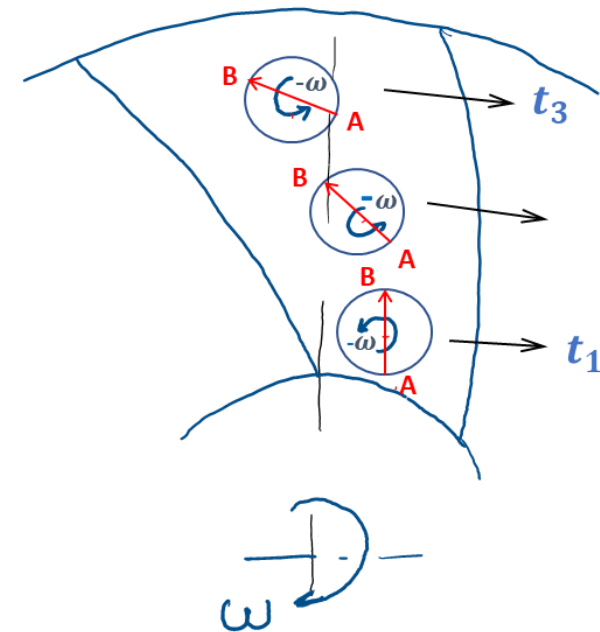
- Si può dimostrare che in ipotesi di moto stazionario e fluido aviscoso, l'equazione si semplifica e diventa:

$$\vec{W} \times (\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega}) = 0$$

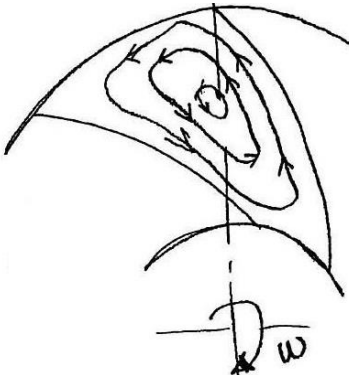
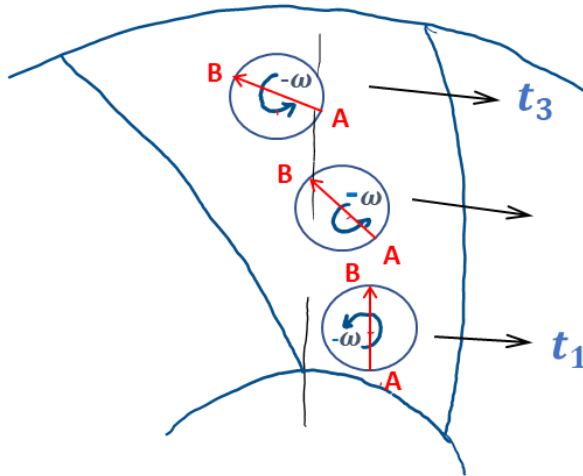
una soluzione fondamentale della quale è:

$$\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$$

- ⇒ La corrente relativa non è irrotazionale ($\vec{\Omega}_w \neq 0$), al più può essere a vorticità costante e pari a $-2\vec{\omega}$
- ⇒ Le particelle della corrente relativa ruotano come corpo rigido attorno a un asse parallelo all'asse della girante con una velocità angolare $-\vec{\omega}$, uguale e contraria a quella della girante, mentre si muovono nel condotto interpolare con velocità $\vec{W}$



Deviazione della corrente relativa



$$\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$$

Questa componente irrotazionale del moto del fluido nella girante non è considerata dalla teoria monodimensionale!!

- Secondo la teoria monodimensionale infatti, per $Q_m = 0$ è $\vec{W} = 0$ e dunque $\vec{C} = \vec{U}$, cosicché il fluido deve **ruotare in solido** con la girante
- In realtà, a portata nulla, poiché $\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$, il fluido è soggetto a una **ricircolazione** all'interno del condotto interpalare

Deviazione della corrente relativa

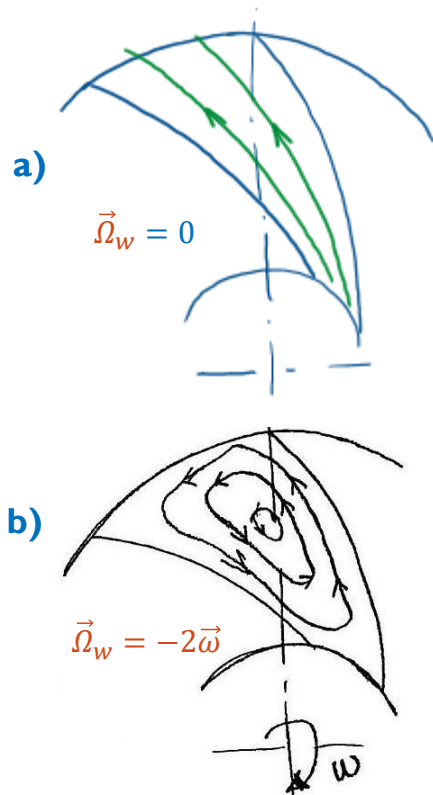


Fig. – a) Moto di trasporto; b) moto di ricircolazione.

Il moto attraverso la girante si può quindi pensare come il risultato della sovrapposizione di due moti:

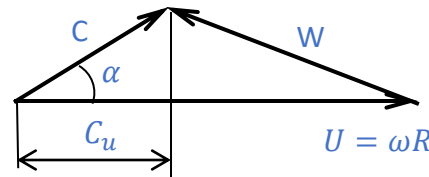
- moto di trasporto legato alla portata Q_m a girante ferma ($\omega = 0$) (fig. a)
- moto di ricircolazione per $Q_m = 0$ con la girante in rotazione con velocità ω (fig. b)



$$\vec{W} = \vec{W}_{\omega=0} Q + \vec{W}_{Q=0} \omega$$

La componente tangenziale della velocità assoluta C_u può perciò essere scritta nella forma:

$$C_u = U + W_u = U + (W_{u\omega=0} Q + W_{uQ=0} \omega)$$



Deviazione della corrente relativa

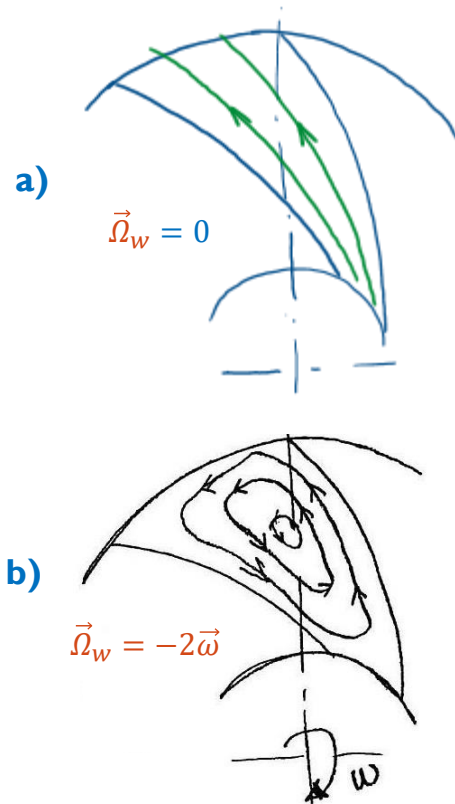


Fig. a) Moto di trasporto; b) moto di ricircolazione.

$$C_u = U + W_u = U + \left(W_{u\omega=0_Q} + W_{uQ=0_\omega} \right)$$

- La componente $W_{u\omega=0_Q}$ è legata alla geometria delle pale ed è esprimibile nella forma:

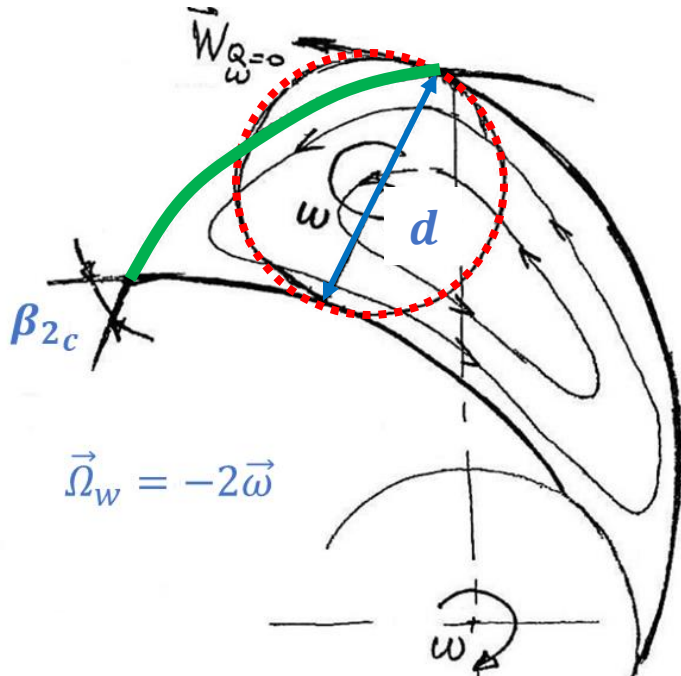
$$W_{u\omega=0_Q} = -C_{m2} \cot \beta_{2c}$$



$$C_{u2\omega=0_Q} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c}$$

E' la componente C_{u2} di cui teneva conto la teoria monodimensionale euleriana

Approccio di Stodola



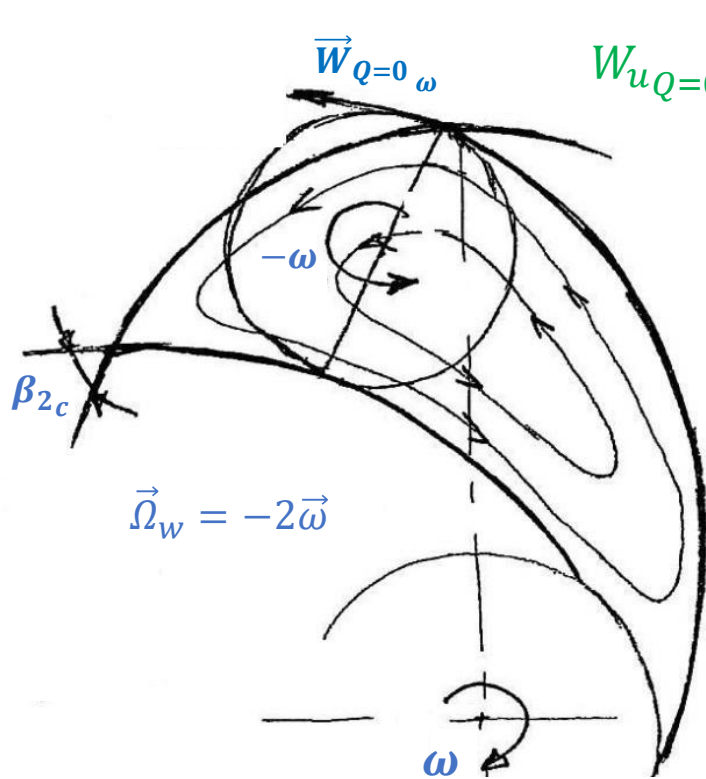
- La componente $W_{uQ=0}$ può essere stimata in prima approssimazione con l'approccio suggerito da Stodola
- Prendendo a riferimento il carattere **rotazionale** del campo di moto della corrente relativa, Stodola riassume la ricircolazione all'interno dei condotti interpallari con la **rotazione** di un **cilindro fluido** (una sorta di macro-particella) situato alla periferia della girante
- La velocità angolare del cilindretto è pari a $-\omega$, e ha diametro d pari a:

$$d = \frac{2\pi R_2}{Z} \sin \beta_{2c}$$

- La componente $W_{uQ=0}$ viene identificata con la velocità periferica del cilindretto:

$$W_{uQ=0} \approx -\omega \frac{d}{2} = -\omega R_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = -U_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = U_{s2}$$

Approccio di Stodola



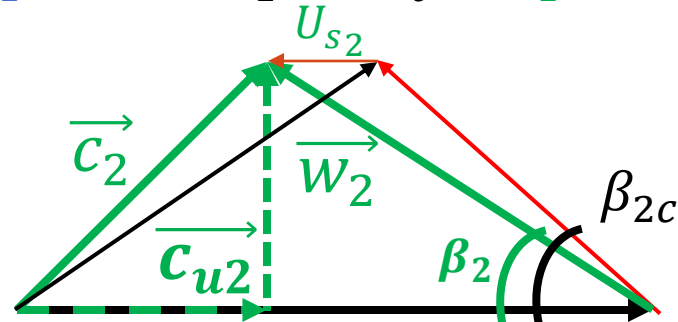
$$W_{u, Q=0, \omega} \approx -\omega \frac{d}{2} = -\omega r_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = -U_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = -U_{s2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c}} \quad \text{secondo Stodola}$$

La componente tangenziale della velocità assoluta C_{u2} all'uscita della girante (con $k_\beta = 1$) è dunque:

$$C_{u2} = U_2 + W_u = U_2 + (W_{u2, \omega=0, Q} + W_{u2, Q=0, \omega})$$

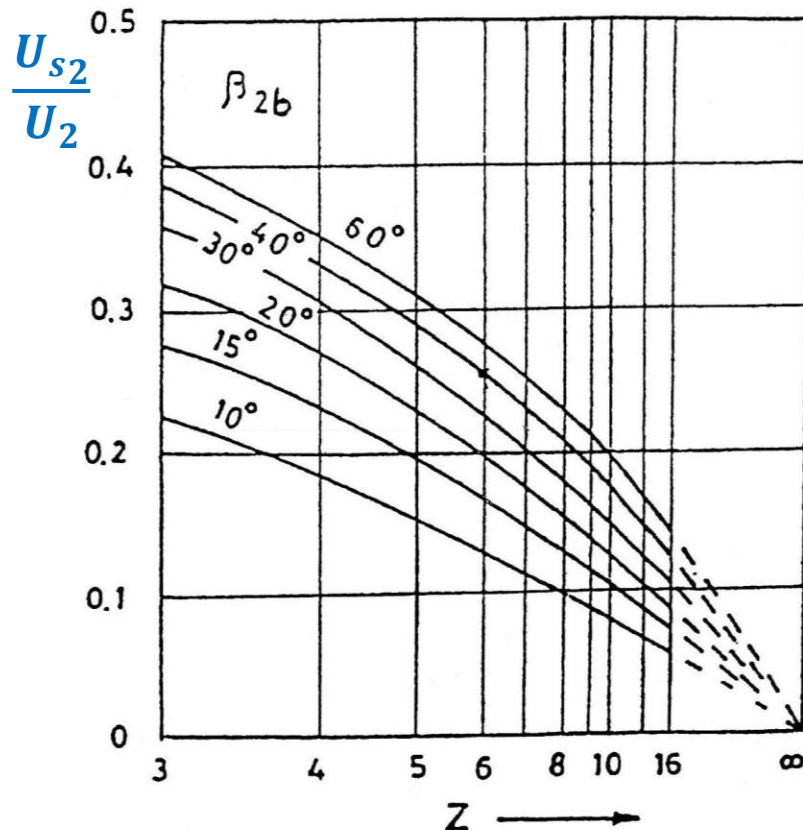
$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$



Deviazione della corrente relativa

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$

$$\left| \frac{U_{s2}}{U_2} \right| = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c}$$



- La correzione suggerita da **Stodola** non è molto accurata sotto l'aspetto quantitativo
- Più accurati i risultati ottenuti da **Busemann**, risolvendo in campo complesso con tecniche di rappresentazione conforme l'equazione differenziale $\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$ per $Q_m = 0$

$$\frac{R_2}{R_1} > \left(\frac{R_2}{R_1} \right)_{lim} = e^{\frac{2\pi}{Z} \sin \beta_{2c}}$$

Deviazione della corrente relativa

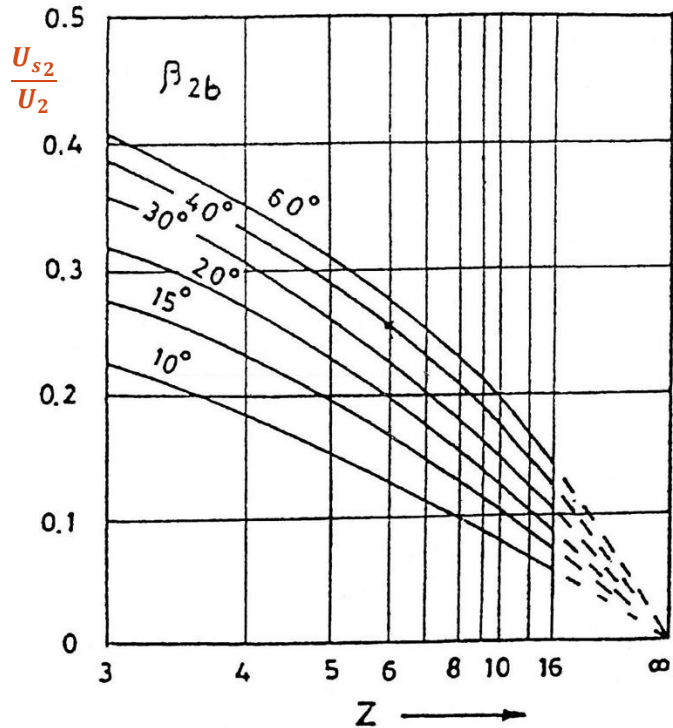


Fig. – Deviazione U_{s2}/U_2 secondo Busemann.

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} \quad \text{Stodola}$$

$$\frac{U_{s2}}{U_2} \rightarrow \text{Fig.} \quad \text{Busemann}$$

- In alternativa può essere adoperata la correlazione semi-empirica suggerita da Wiesner:

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\sqrt{\sin \beta_{2c}}}{Z^{0,7}}$$

valida per

$$\frac{r_2}{r_1} > e^{\frac{8,16 \sin \beta_{2c}}{Z}}$$

Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

