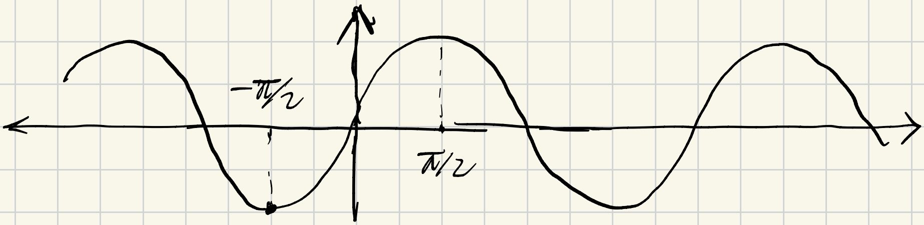
Lezione 27

Inversa della funzione $\sin(x)$:



$\sin(x)$ non è iniettiva, come funzione di $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quindi non ammette inversa. Per renderla invertibile, restringo dominio e codominio

$$\sin(x): [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1].$$

così che il seno diventa invertibile (sia iniettivo che suriettivo). L'inversa è chiamata arcoseno di x

$$\arcsin(x): [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

così che:

$$\begin{tikzcd}[-\pi/2, \pi/2] \arrow[r, bend left, "\sin(x)"] & {[-1, 1]} \arrow[l, bend left, "\arcsin(y)"]\end{tikzcd}$$

<u>Oss</u>: $\arcsin(y)$ è l'arco (in radianti) il cui seno è y.

Derivata:

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Rimpiazzo x con $\arcsin(y)$, avrò

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

Devo capire ora chi è $\cos(\arcsin(y))$.
So che (in generale)

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1.$$

Dunque

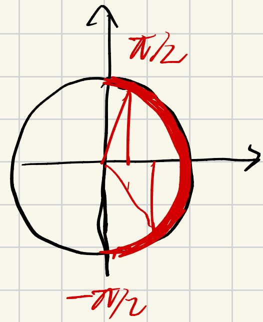
$$\cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}.$$

Nel nostro caso, noto che, visto che

$$\arcsin(y)\in[-\pi/2,\pi/2]$$

abbiamo che

$$\cos(\arcsin(y))\geq 0.$$



Perciò

$$\cos(\alpha)=+\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$$

Sostituendo:

MOSTRATA SOPRA

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin(\arcsin(y))\right)^2}}$$

Scritture diverse della stessa cosa

$$\sin^2(x) = \left(\sin(x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Conclusione

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Cioè, chiamando x la variabile:

$$\boxed{(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

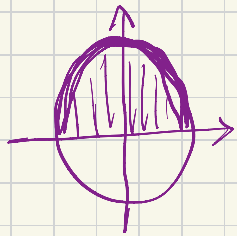
Esercizio Trovare

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+y^2}$$

Oss Scegliere di invertire il coseno

$\cos(x) : [0, \pi] \to [-1, 1]$.



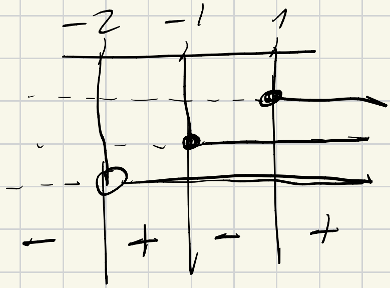
Esercizio Sia $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

Scrivere l'equazione della tangente a $y = f(x)$ nel punto $x = 1$.

Grafico (non richiesto)

Dominio: $x \neq -2$

Segno: $\frac{x^2-1}{x+2} \geq 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \geq 0$



Però $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$, $-2 \leq x \leq -1$.

Intersezioni con gli assi

$$f(0) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = 0 \iff x = \pm 1.$$

Asintoti verticali

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{x^2-1}{x-2} = \pm\infty$$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = \pm\infty.$$

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+2/x)} = 1.$$

$m = 1$. Calcolo q

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} - \frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} - \frac{x(2+1/x)}{x(1+2/x)} = -2$$

Asintoto obliquo $y = x-2$.

Derivata (crescenza, decrescenza, massimi e minimi).

$$\left(\frac{x^2-1}{x+2} \right)' = \frac{(x^2-1)' \cdot (x+2) - (x^2-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

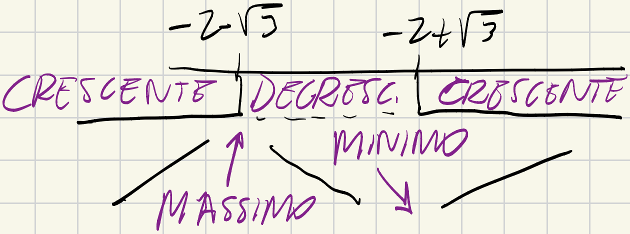
Segno della derivata

$$\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \geq 0 \iff x^2+4x+1 \geq 0$$

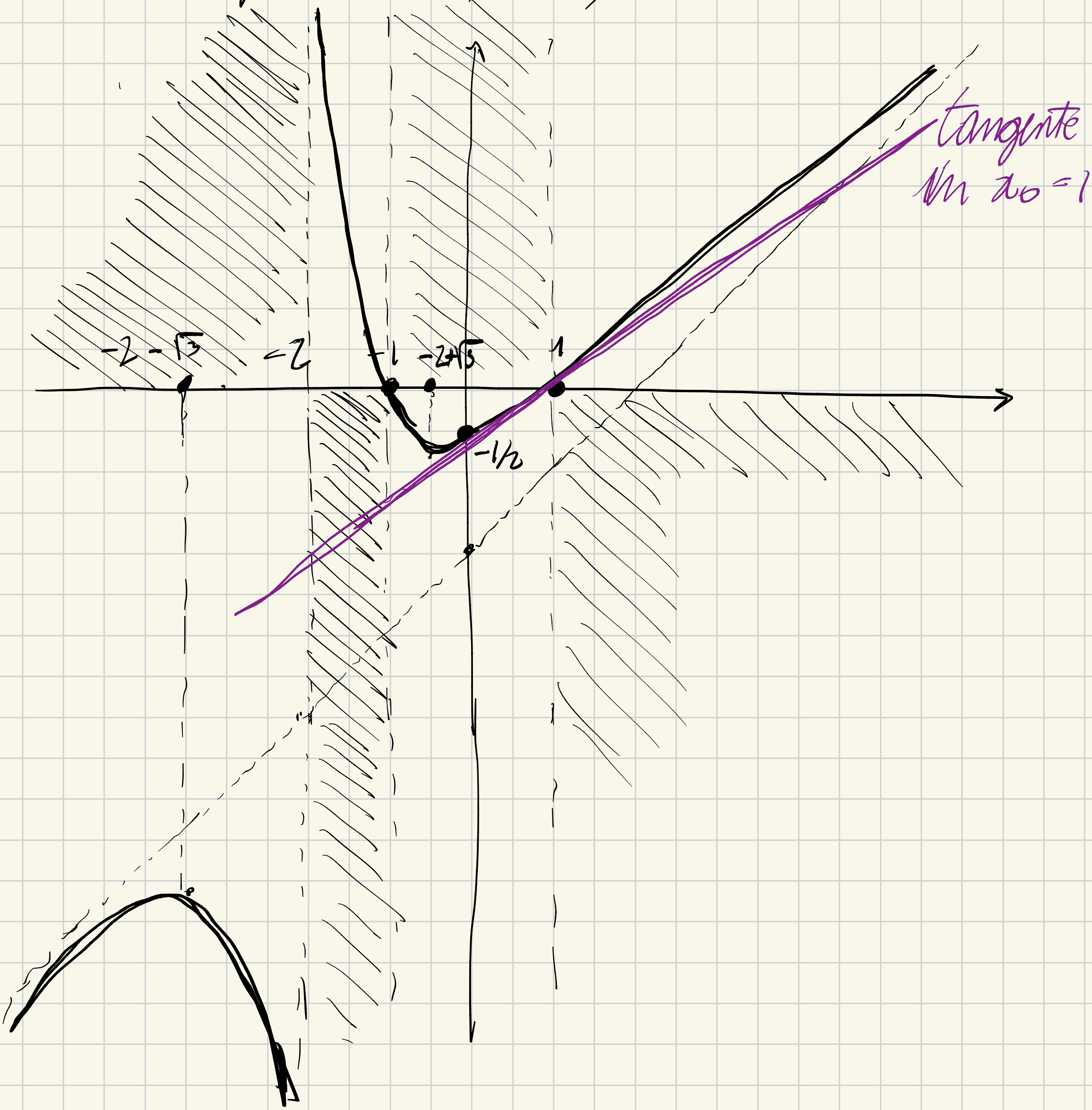
$$\Delta = 16-4 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2} = -2\pm\sqrt{3}$$

$$\iff x < -2-\sqrt{3},\ x > -2+\sqrt{3}.$$



Massimo per $x = -2-\sqrt{3}$, che vale



Cerco la tangente a $f(x)$ in $x_0 = 1$.

Coefficiente angolare:

$$m = f'(1) = \left.\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\right|_{x=1}$$

$$= \frac{1+4+1}{(1+2)^2} = \frac{6}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Per trovare q, impongo che la retta

$$y = \frac{2}{3}x + q$$

passi per il punto $(x, f(x)) = (1, f(1)) =$

$$= (1, 0)$$

quindi

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 1 + q \Rightarrow q = -2/3.$$

Perciò la tangente è

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

<u>Oss</u> Notare che il coefficiente

angolare della tangente è $2/3$ e $2/3 < 1$, $1 =$ coefficiente angolare dell'asintoto obliquo.

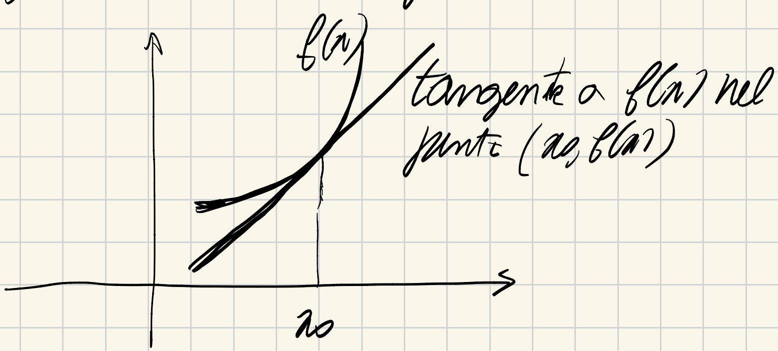
Oss. Nella fisica, si usa spesso la derivata rispetto al tempo dello spazio percorso, che è la velocità:

$$f(x) \longleftrightarrow s(t)$$

$s =$ spazio
$t =$ tempo

$$s'(t_0) = \dot{s}(t_0).$$

Riprendiamo la nozione di crescenza e decrescenza, da un altro pto di vista.



L'equazione della retta tangente è

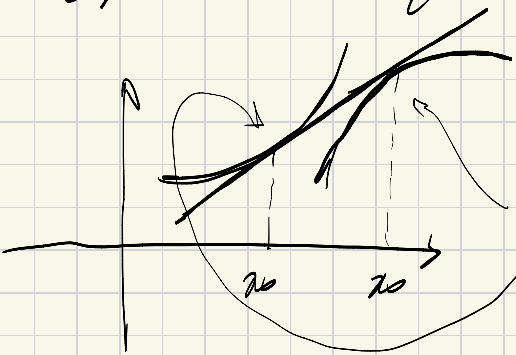
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Sappiamo che

$f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f$ è crescente

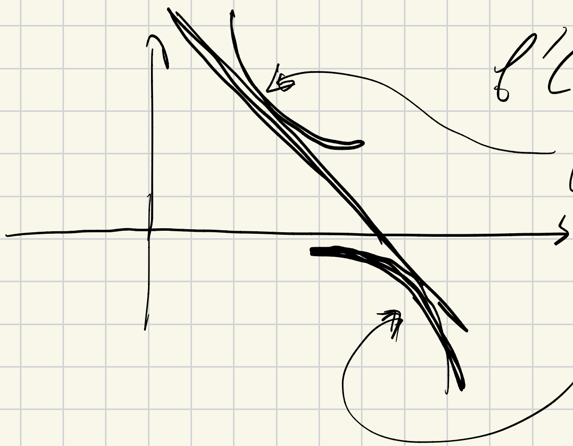
$f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f$ è decrescente

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ tangente orizzontale



$f'(x_0) > 0$

(due casi)

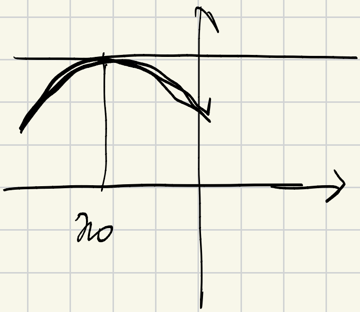


$f'(x) < 0$

(due casi)

Se $f'(x_0) = 0$ abbiamo 3 casi

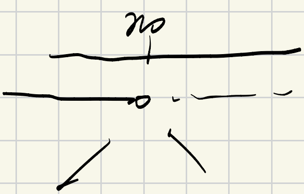
CASO 1



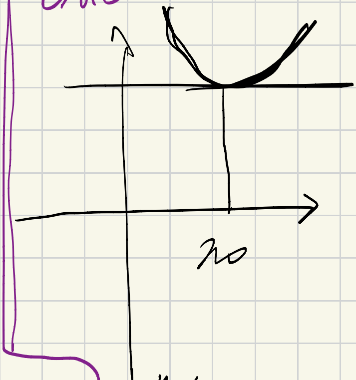
Massimo in x_0

$f'(x) > 0$ per $x < x_0$

$f'(x) < 0$ per $x > x_0$



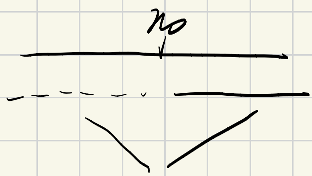
CASO 2



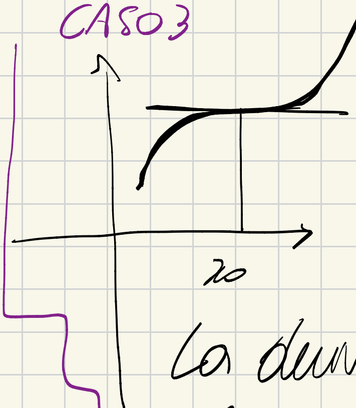
Minimo in x_0

$f'(x) < 0$ in $x < 0$

$f'(x) > 0$ in $x > 0$



CASO 3



La derivata non cambia segno ma si annulla in x_0.

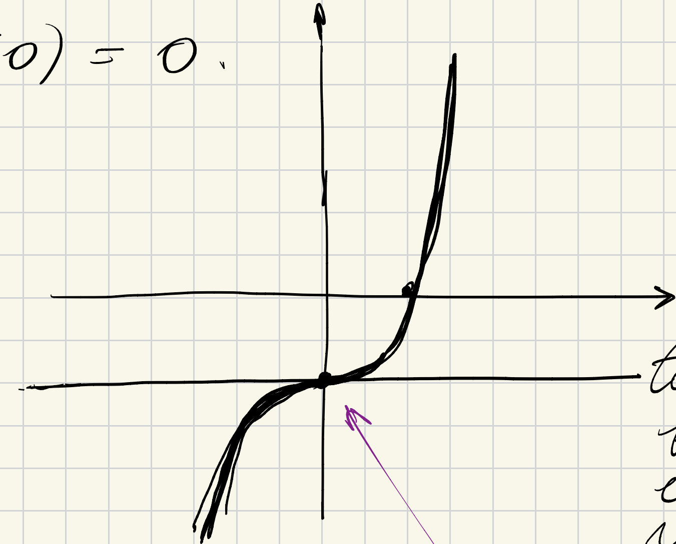
$\boxed{\text{Pto di FLESSO}}$

La derivata cambia segno in x_0

<u>Esempio</u> $f(x) = x^3 - 1$.

$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x$

$f'(0) = 0.$



tangente a $f(x)$ in $x=0$ è

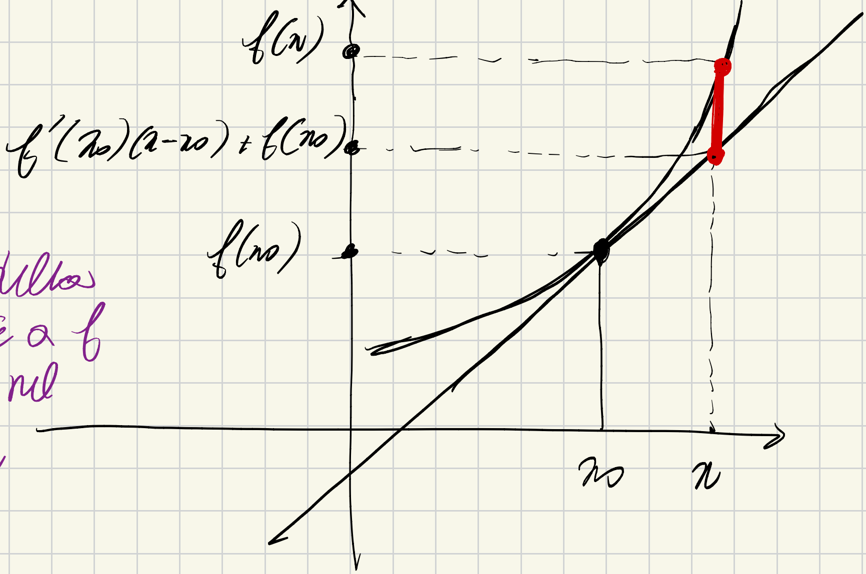
$y = 0 \cdot x + f(0)$

$y = -1.$

$(f(0) = -1)$

$x_0 = 0$ è punto di flesso per $y = x^3 - 1.$

Notiamo ora che la derivata, o per meglio dire, la retta tangente, approssima la funzione: abbiamo un "errore" tra la funzione e la tangente valori della tangente a f in x_0 nel punto x



Indico il termine d'errore con

$$\varepsilon(x-x_0) = f(x) - \left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right]$$

Oss. $\varepsilon(x-x_0)$ è un termine d'errore che dipende da x e x_0, anzi dalla loro differenza. Quindi, è una funzione.
Uso ora questa notazione per riscrivere:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0).$$

Lavoro con questo $\varepsilon(x-x_0)$; divido tutto per $x-x_0$ ottenendo:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)\cdot\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}} + \frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0}$$

Faccio il limite per $x \to x_0$ e ottengo

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0}$$

Noto ora che, per definizione,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

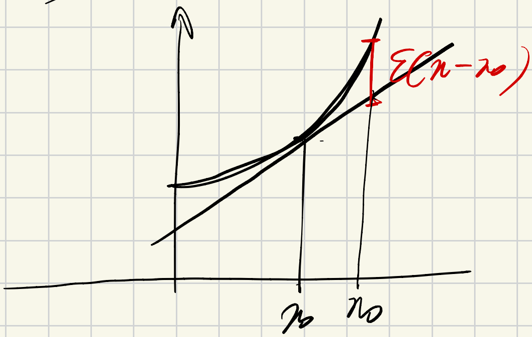
dunque ho ottenuto

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0} = 0}$$

Questa formula dice in particolare che

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0) = 0.$$

Ma dice più di questo (che già sapevamo, visto che $\varepsilon(x_0 - x_0) = \varepsilon(0) = 0$



ma dice che $\varepsilon(x-x_0)$ va a zero più velocemente di $x-x_0$. Si dice in questo caso che:

$\varepsilon(x-x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x-x_0)$, e si scrive

$$\varepsilon(x-x_0) = o(x-x_0)$$

che quindi significa semplicemente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Useremo spesso questa notazione

Esempio $x^2 = o(x)$: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

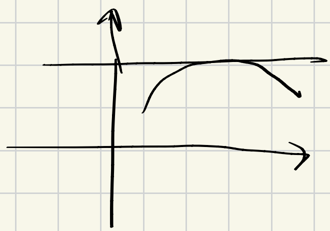
$x^3 = o(x)$: $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0$

(punto $x_0 = 0$).

Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema di Fermat: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in x_0. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale, allora

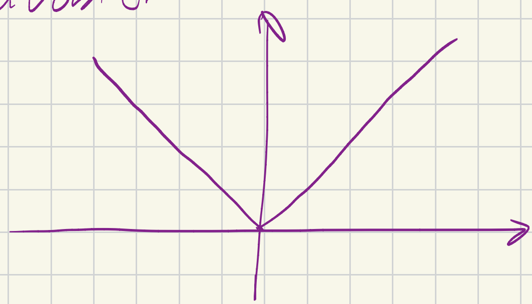
$$f'(x_0) = 0.$$



Oss 1. Il teorema dice che $f'(x_0) = 0$ è condizione NECESSARIA affinché x_0 sia un massimo o minimo locale. (cioè, tutti i candidati ad essere massimo

o minimo locali annullano la derivata).
Non è una condizione sufficiente:
$y = x^3 - 1$ ha derivata nulla in $x_0 = 0$
ma $x_0 = 0$ non è pto di massimo o
di minimo (è punto di flesso).

<u>Oss 2</u> Il teorema di Fermat non dice
nulla su massimi e minimi di funzioni
non derivabili!

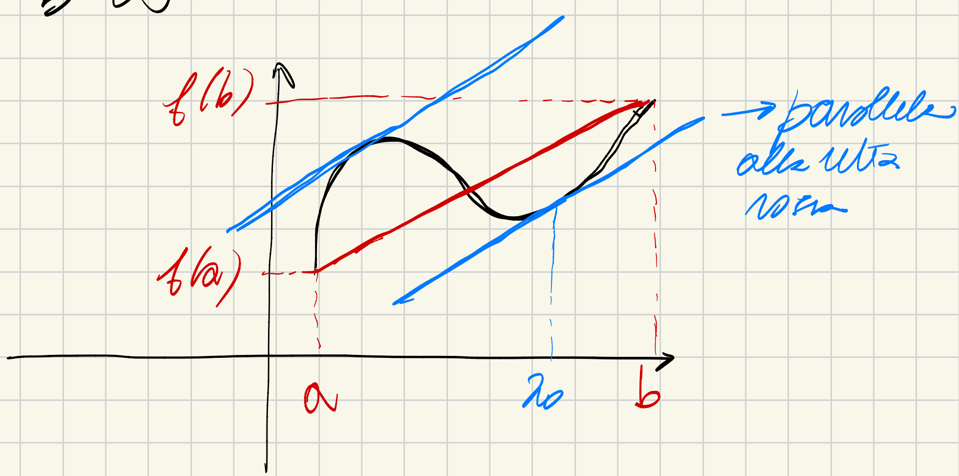


$y = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$
ma $x_0 = 0$ è un punto di minimo
(assoluto).

Teorema del valor medio

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in tutti i punti dell'intervallo (a,b).
Allora esiste un punto $\underbrace{x_0 \in (a,b)}_{a < x_0 < b}$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ = coefficiente angolare della retta per i punti $(b, f(b))$, $(a, f(a))$.

Il teorema dice quindi che esiste

un pto x_0 tale che il coefficiente angolare della tangente a $f(x)$ in x_0 sia uguale a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè: esiste un pto x_0 tale che la tangente a $f(x)$ in x_0 è parallela alla retta per i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

(nel disegno, tra che ci sono due punti che vanno bene).