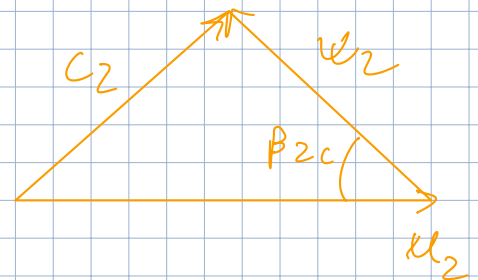
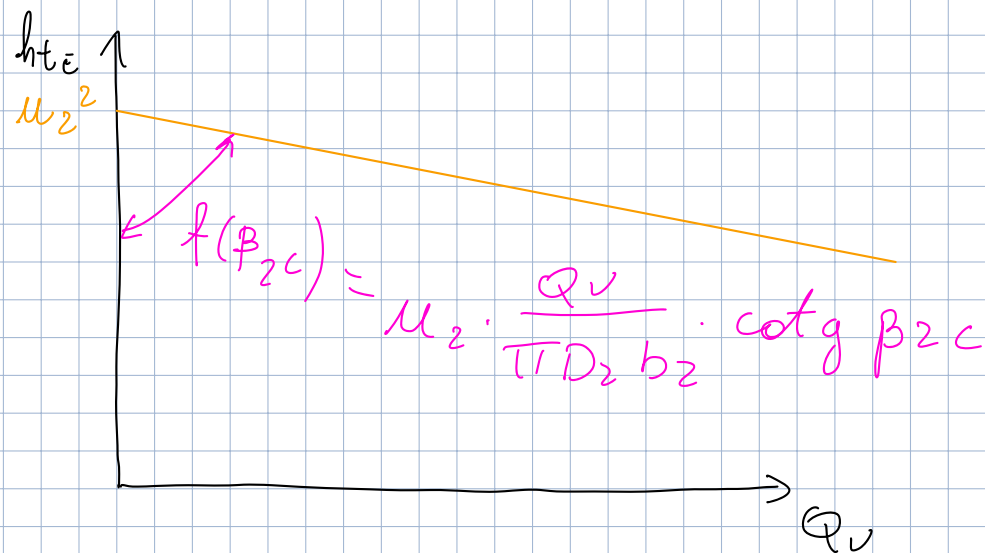
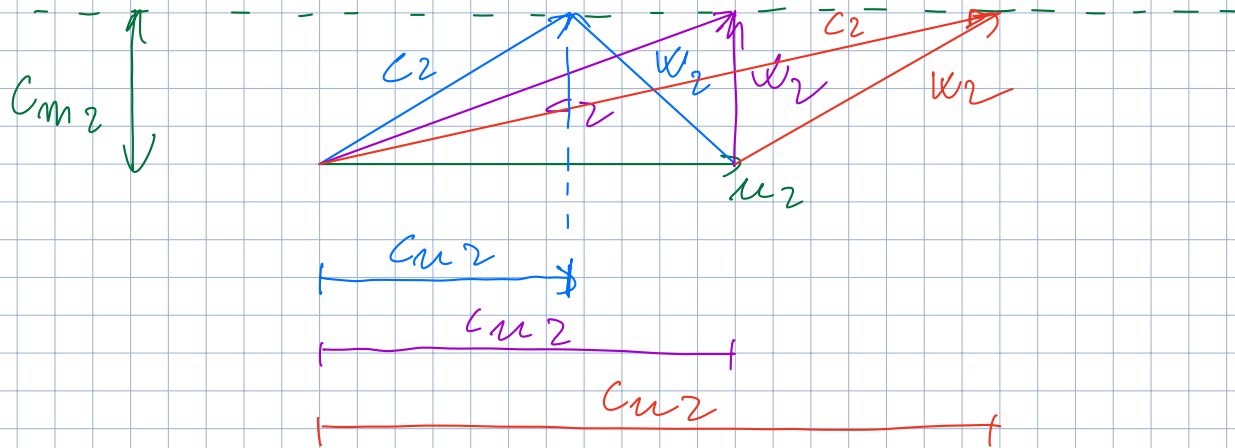
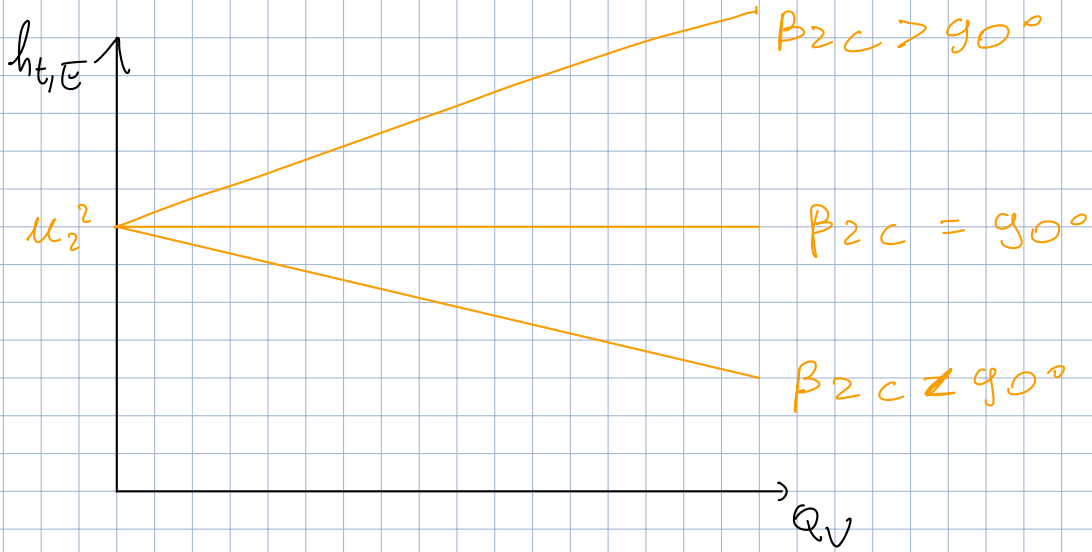




$$\begin{aligned}
 g h_{t,E} &= u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1} \rightarrow \text{manodlu } c_{u1} = 0 \\
 &= u_2 c_{u2} = u_2 (u_2 - c_{m2} \cotg \beta_{2c}) \\
 &= u_2^2 - u_2 c_{m2} \cotg \beta_{2c} \\
 &= u_2^2 - u_2 \frac{Q_v}{\pi D_2 b_2} \cotg \beta_{2c}
 \end{aligned}$$



$$\beta_{2c} < 90^\circ$$



$$\frac{g h_{t,E}}{u_2^2} = 1 - \frac{c_{m2}}{u_2} \cot \beta_{2c}$$

$\Downarrow$

ψ_E

$\parallel$

n° di pressione
euleriana

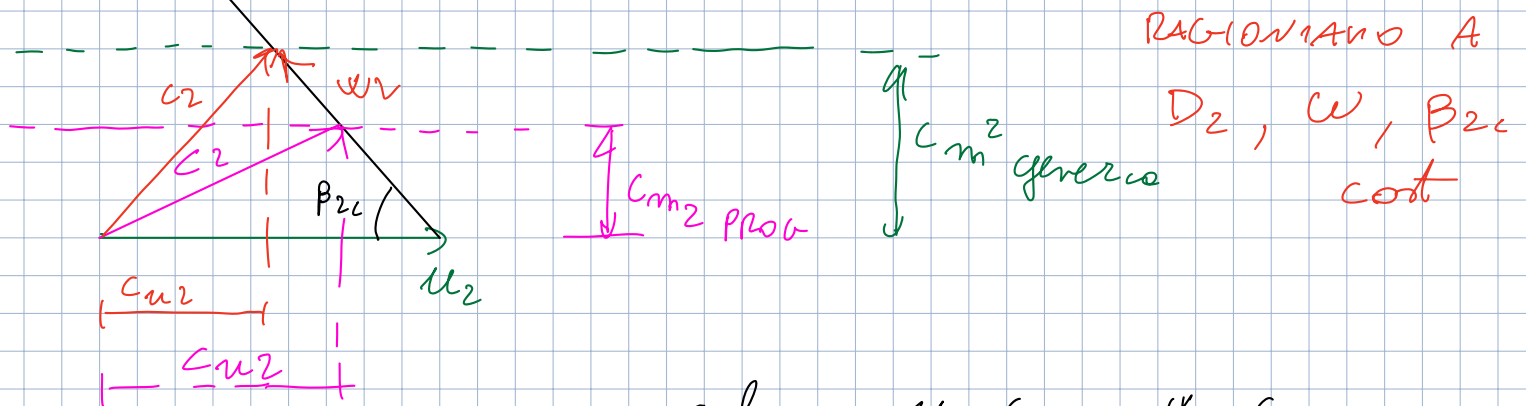
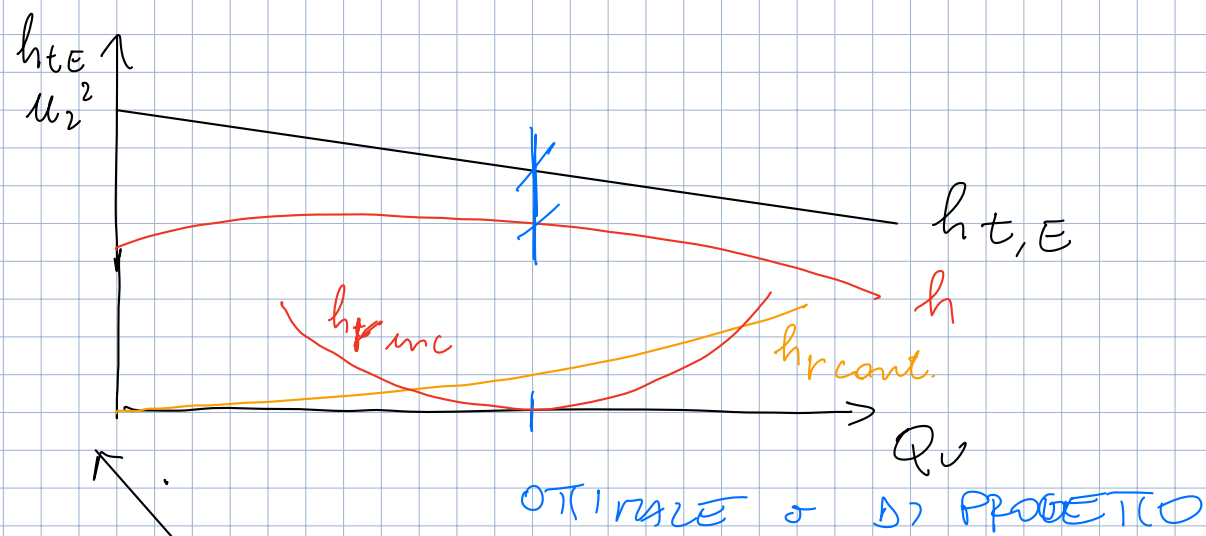
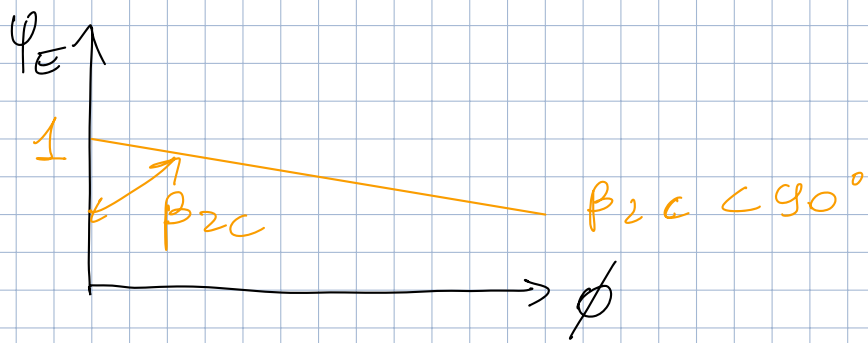
$\Downarrow$

ϕ

$\parallel$

n° di
flusso

$$\psi_E = 1 - \phi \cot \beta_{2c}$$



$$gh_{t,E} = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

Critica alla teoria monodimensionale

Corso di Macchine 1

Agenda

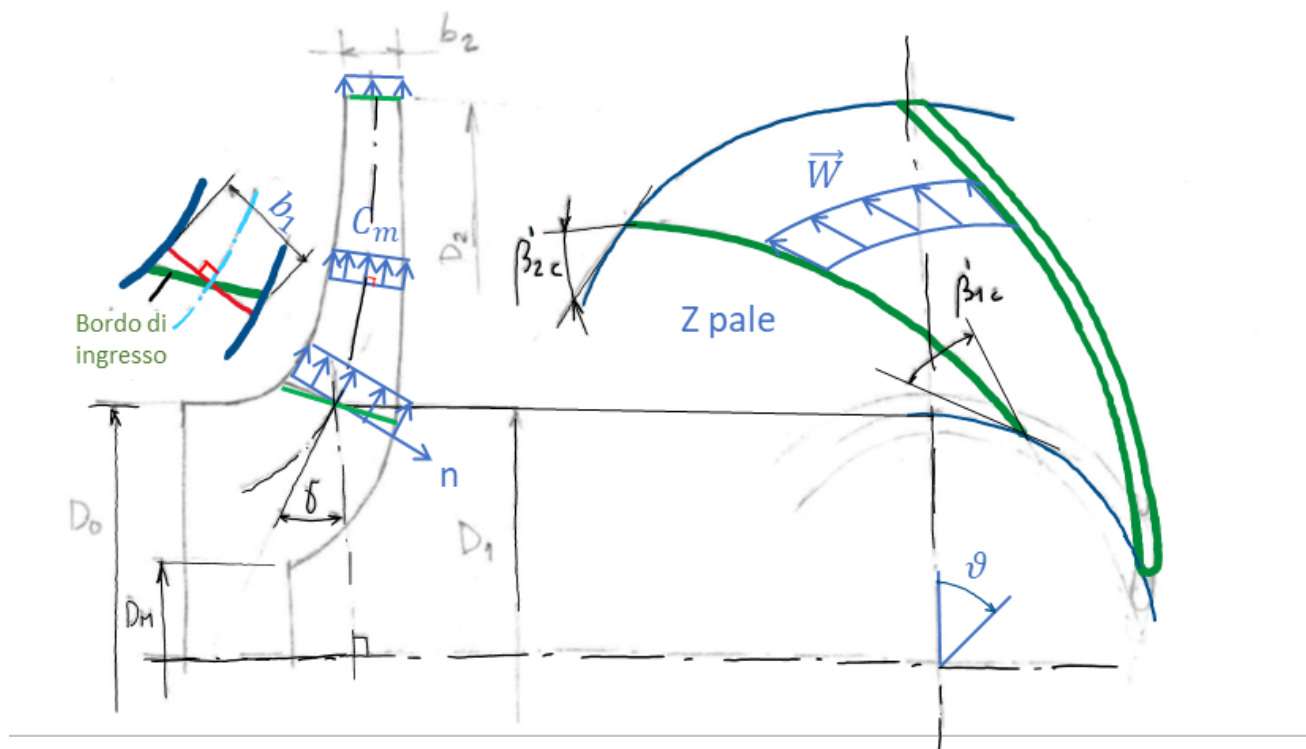
- ▶ Riepilogo: cosa dice la Teoria Monodimensionale o Euleriana?
- ▶ Critica alla teoria Euleriana
- ▶ Deviazione della corrente relativa



Riepilogo: cosa dice la Teoria
Monodimensionale o Euleriana?

Teoria euleriana

- Secondo la teoria euleriana, **quando i una girante si AZZERA la PORTATA**, le particelle fluide ruotano IN SOLIDO con la GIRANTE STESSA
- In questo modo, appena di RIPRISTINA la PORTATA, le TRAIETTORIE della CORRENTE di TRASPORTO, NON ESSENDO INFLUENZATE DALLA ROTAZIONE, hanno lo stesso andamento dei PROFILI PALARI

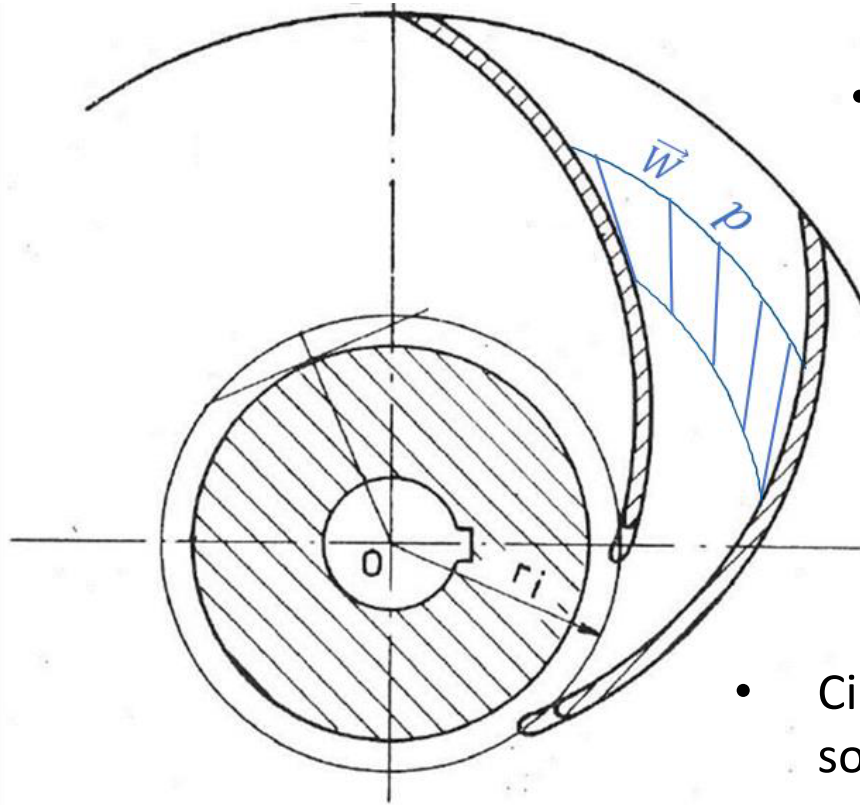


Teoria euleriana

- In realtà, le particelle della CORRENTE RELATIVA (che ha carattere rotazionale), ruotano intorno ad un asse parallelo all'asse della macchina con una VELOCITA' UGUALE e CONTRARIA a quella del rotore!
- La rotazionalità della corrente relativa esercita una DUPLICE AZIONE sul fluido:
 - La velocità relativa W ha andamento diverso da quello delle pale!
 - All'imbocco e all'uscita del condotto la velocità relativa ha un angolo di inclinazione diverso da quello calcolato con il procedimento monodimensionale!

Critica alla teoria Euleriana

Critica alla teoria euleriana



- La teoria euleriana **descrive bene** il campo di moto?
- Offre **stime appropriate** del **lavoro** eseguito da una turbomacchina operatrice (pompa, compressore) o dell'**energia** meccanica che si rende disponibile all'albero di una turbomacchina motrice (turbina)?
- Ci sono **potenziali contraddizioni** della teoria euleriana sotto l'aspetto della meccanica classica!!!
- Si consideri il principio della variazione del momento della quantità di moto

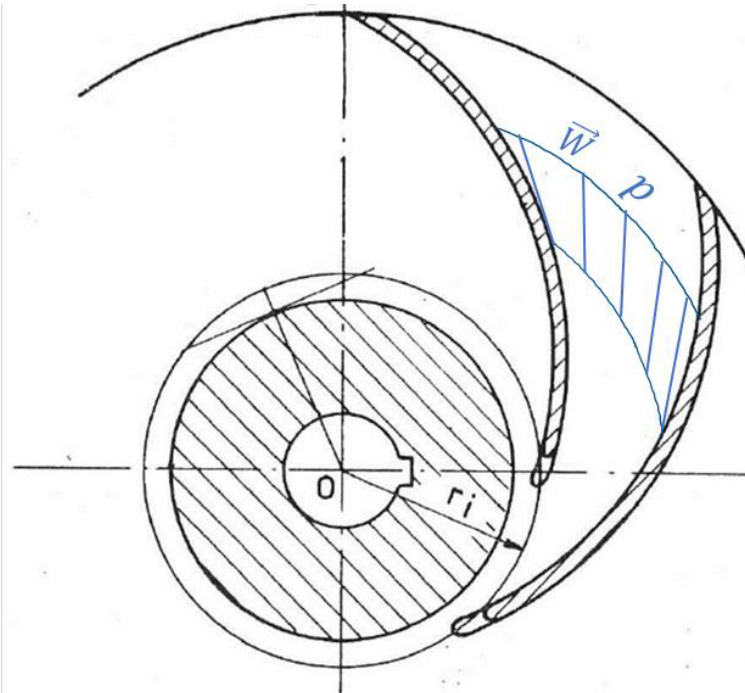
$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

Critica alla teoria euleriana

$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$



- L'incremento di pressione statica in condizioni ideali si riferisce ai **valori medi** tra monte e valle della girante; lo stesso vale per la variazione dei momenti angolari RC_u
- Si ottiene (tralasciando il pedice "id"):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2 - U_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2 - U_2^2}{2}$$

sicché, lungo la linea di corrente relativa media

$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost}$$

rimane **costante l'energia totale** della corrente **relativa** $\frac{p_w^0}{\rho}$

Critica alla teoria euleriana

$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost}$$

- L'ipotesi di assialsimmetria del campo di moto

$$\frac{\partial(\vec{W}, p, \dots)}{\partial \vartheta} = 0$$

comporta che le pressioni p_A e p_B nei punti A e B delle due facce di una stessa pala ($r_A = r_B$), siano tra di loro uguali

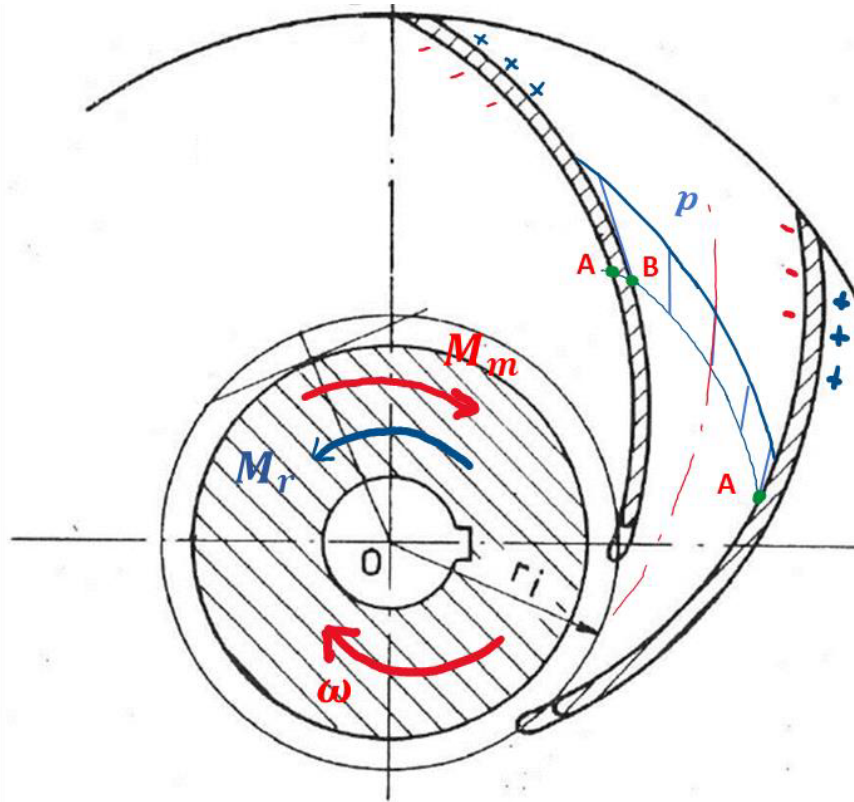


MACCHINE OPERATRICI:

non agisce alcuna forza tangenziale, e dunque **nessun momento resistente** indotto dall'**azione** del **fluido** sulle pale per **equilibrare** il momento trasmesso alla girante di una pompa (o di un compressore) dal motore di azionamento

⇒ L'ipotesi di **assial-simmetria** della teoria euleriana è perciò IRREALISTICA!

Critica alla teoria euleriana



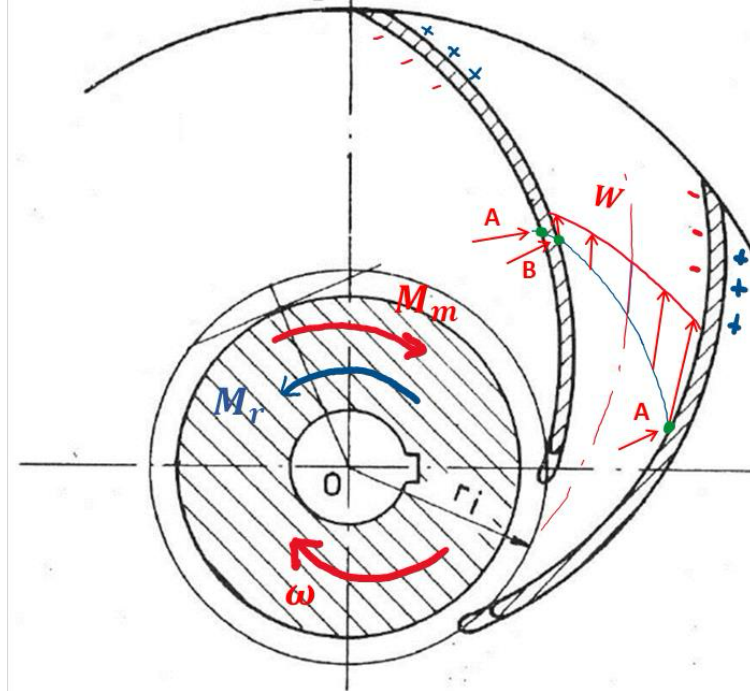
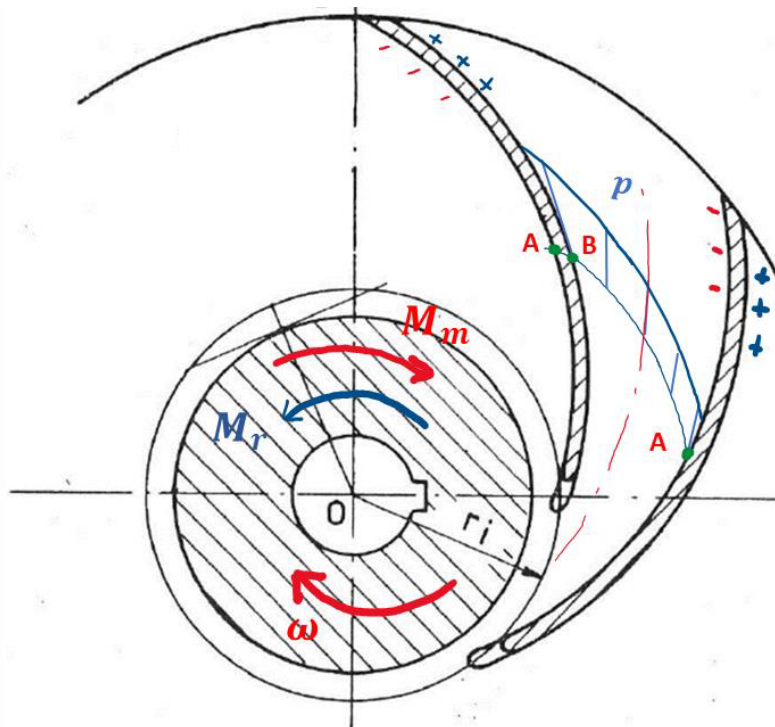
⇒ L'ipotesi di assialsimmetria $\partial(\vec{W}, p, \dots)/\partial\vartheta = 0$ è perciò irrealistica!



Come correggerla??

- Il momento motore M_m potrà essere equilibrato dal momento di reazione M_r esercitato dal fluido sulle pale solo se ...
... tra le due facce di una pala si stabilirà una differenza di pressione $\Delta p = p_B - p_A > 0$

Critica alla teoria euleriana



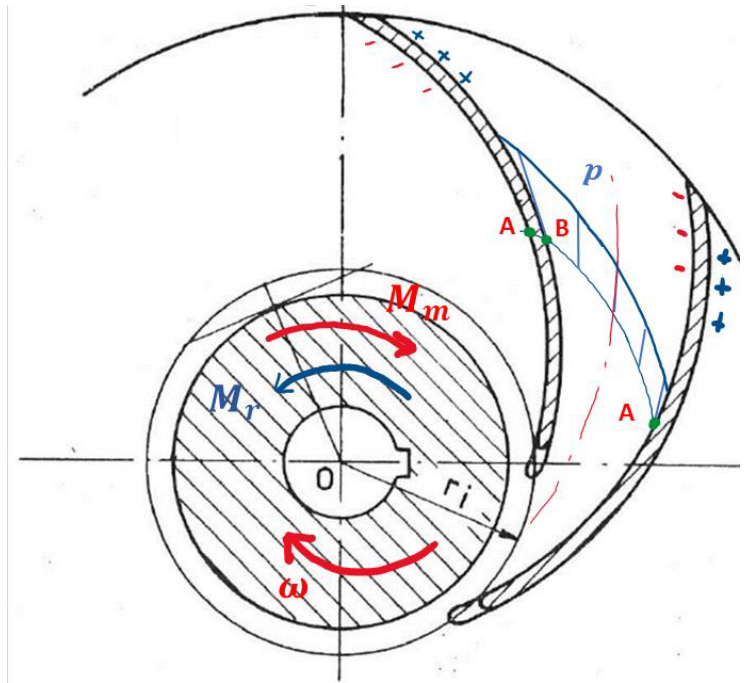
- Nell'ipotesi di **fluido perfetto**, nella girante:

$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A}{\rho} + \frac{W_A^2 - \cancel{U_A^2}}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{W_B^2 - \cancel{U_B^2}}{2}$$

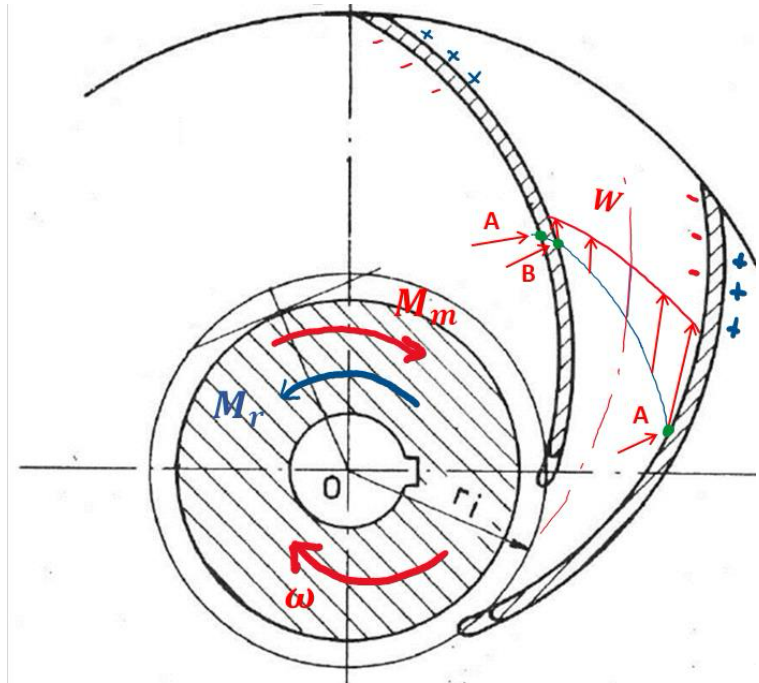
In direzione circonferenziale ($r_A = r_B \Rightarrow U_A = U_B$), l'esistenza di un gradiente di pressione:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_B - p_A}{\rho} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta W^2}{2} = \frac{W_A^2 - W_B^2}{2} = \frac{p_B - p_A}{\rho} > 0$$

Critica alla teoria euleriana



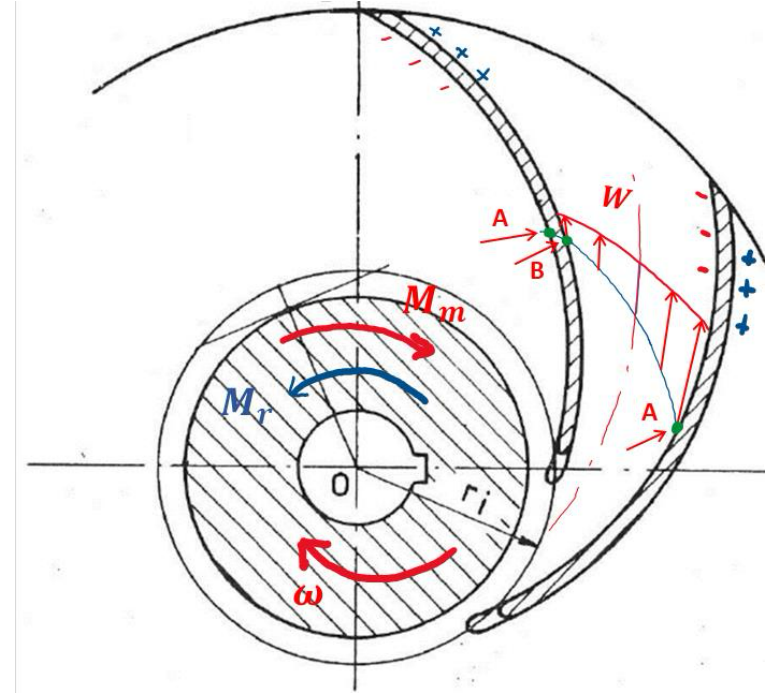
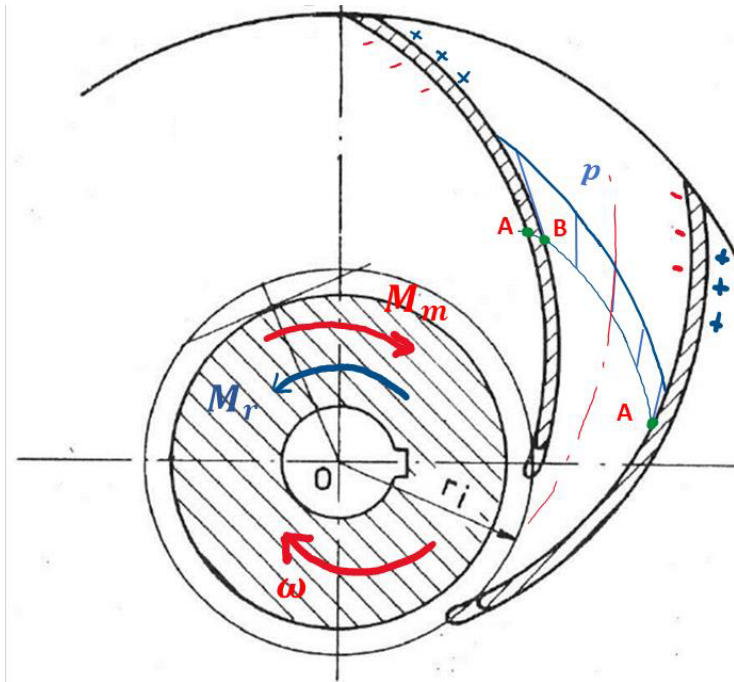
$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{(p_B - p_A)}{\rho}$$



$$\frac{\Delta W^2}{2} = \frac{(W_A^2 - W_B^2)}{2}$$

- Lo scambio di energia richiede un **gradiente circonferenziale** della pressione p e della velocità relativa W
- Poiché Δp è legato alla forza e dunque al momento M_r che le Z pale della girante devono opporre al momento motore M_m , i valori di Δp e ΔW^2 sono legati al numero di pale Z , e **diminuiranno all'aumentare di Z**

Critica alla teoria euleriana



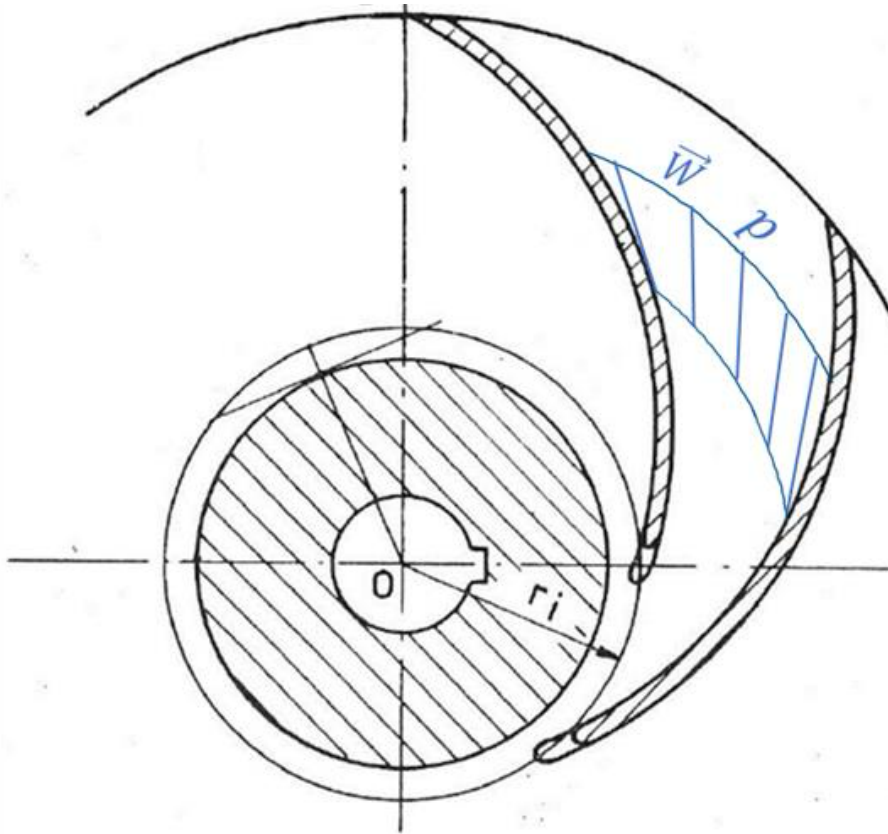
$$\Delta p / \rho = (p_B - p_A) / \rho$$

$$\Delta W^2 / 2 = (W_A^2 - W_B^2) / 2$$

⇒ Pertanto, la teoria euleriana ($\partial(\vec{W}, p, \dots) / \partial \vartheta = 0$) trova la sua validazione quando il numero $Z \rightarrow \infty$

Ipotesi di assial-simmetria

Critica alla teoria euleriana

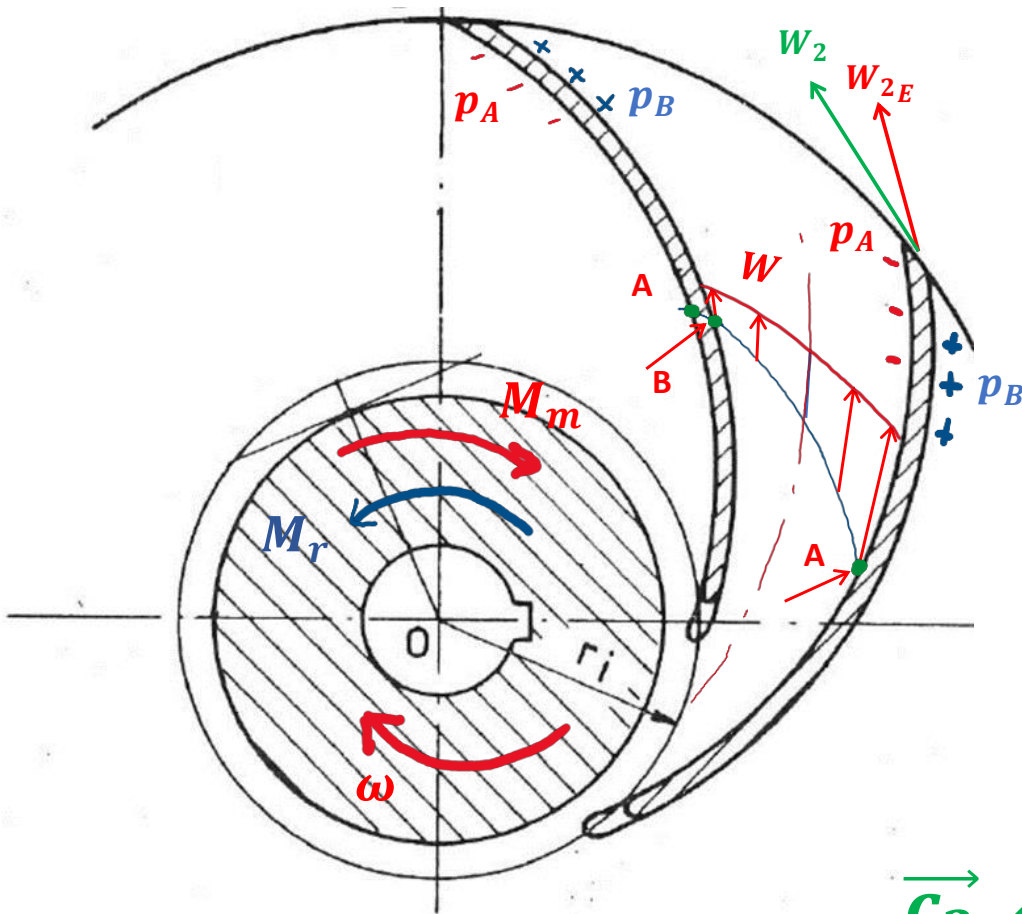


- C'è un'altra caratteristica dell'approccio euleriano che viene meno

L'ipotesi che il fluido segua perfettamente la geometria delle pale, ovvero che:

$$\beta_{fluido} = \beta_{pale}$$

Critica alla teoria euleriana

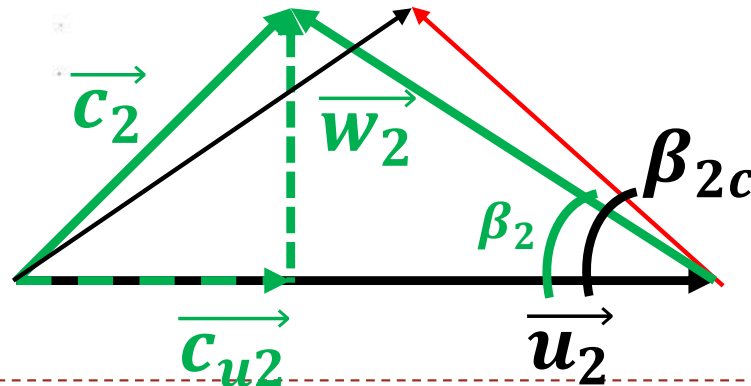


$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_B - p_A}{\rho}$$

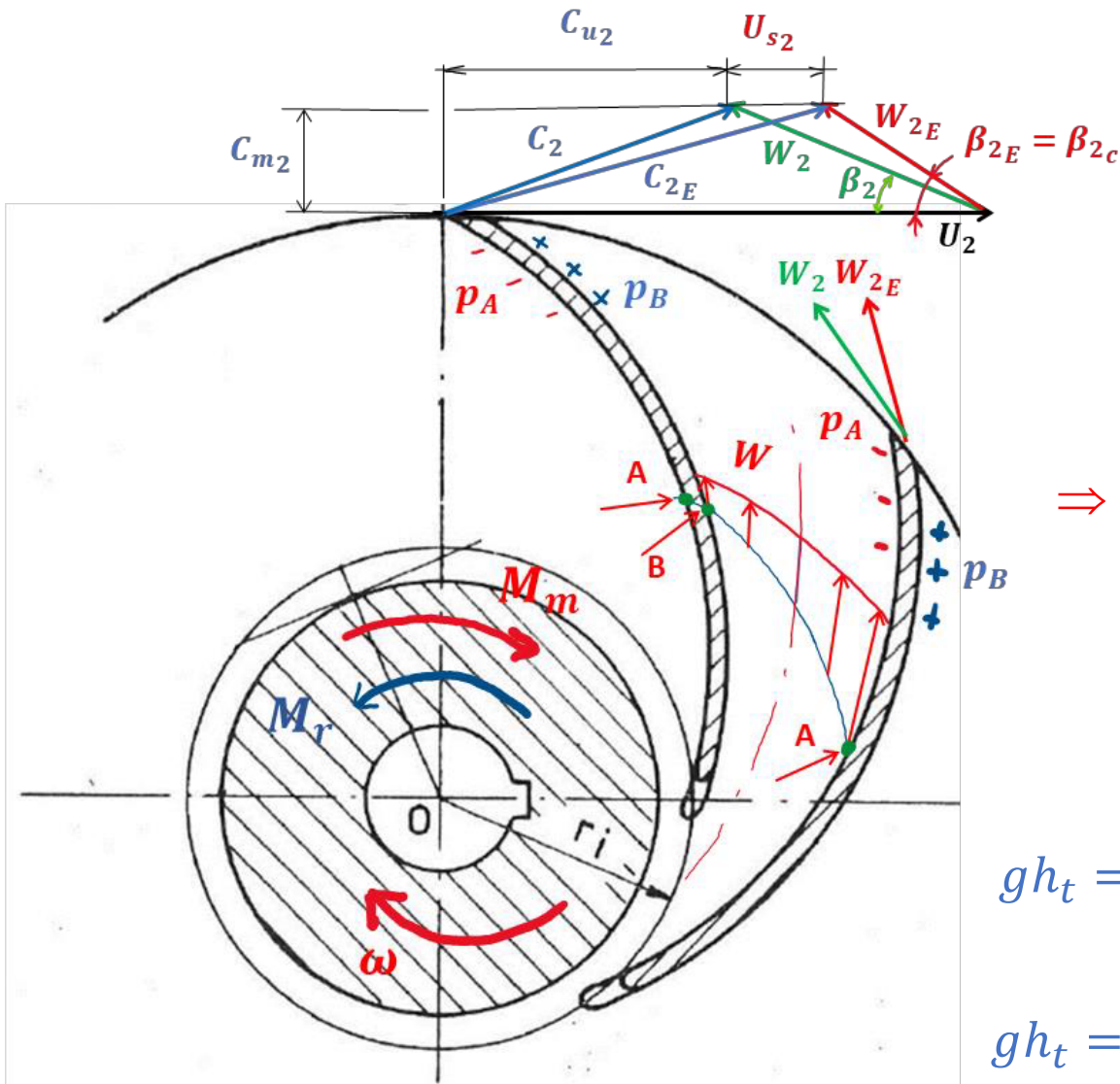
$$\frac{\Delta W^2}{2} = \frac{W_A^2 - W_B^2}{2}$$

⇒ Per effetto del gradiente circonferenziale di pressione $\partial p / \partial \vartheta$, la velocità relativa W_2 all'uscita della girante viene deviata rispetto alla direzione definita dall'angolo β_{2c} delle pale

$$\beta_2 < \beta_{2c}$$



Critica alla teoria euleriana



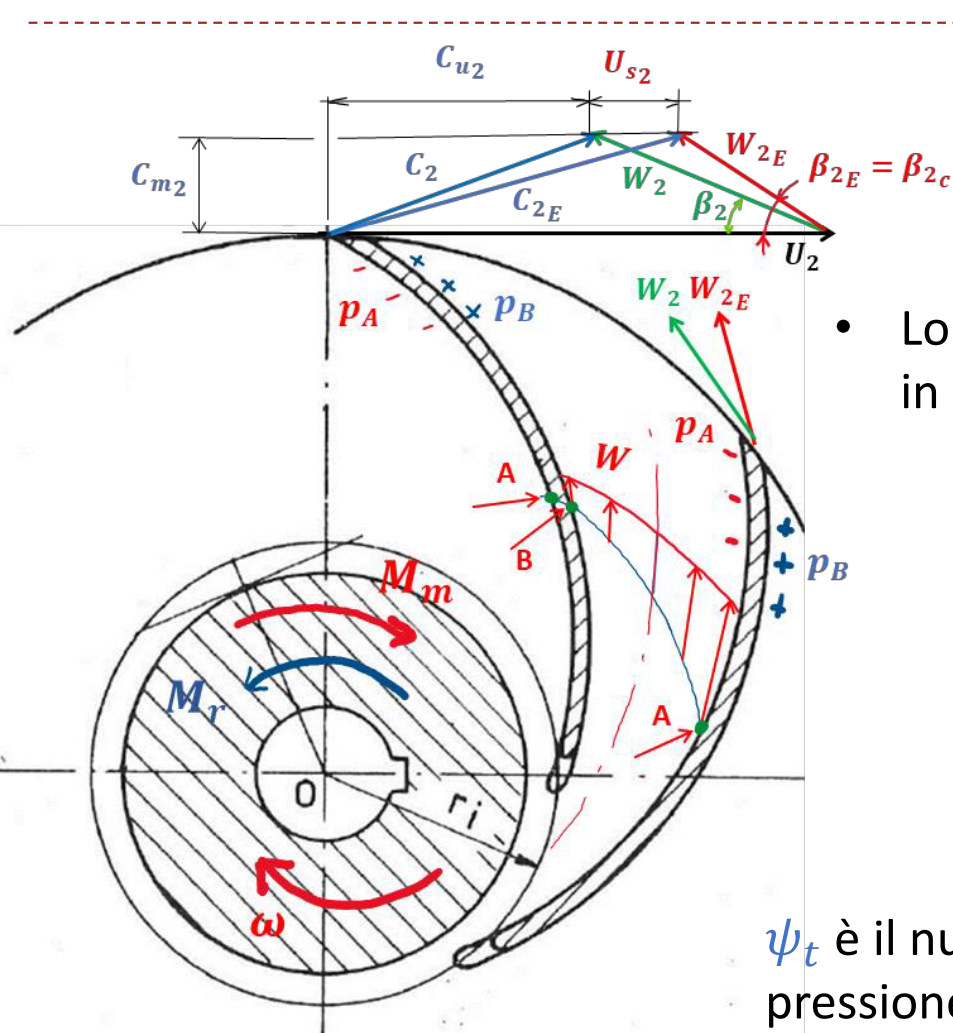
La velocità relativa W_2 subisce uno scorrimento U_{s2} in direzione contraria a U_2

⇒ Ne consegue una riduzione della componente C_{u2} e quindi dello scambio di energia gh_t rispetto al valore euleriano $gh_{t,E}$:

$$gh_t = U_2 (C_{u_{2E}} - U_{s2}) = U_2 C_{u2} < gh_{t,E}$$

$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}) < gh_{t,E}$$

Critica alla teoria euleriana



$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})$$

Come quantificare?

- Lo scambio energetico si può rappresentare anche in forma adimensionale:

$$\frac{gh_t}{U_2^2} = \frac{U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})}{U_2^2}$$

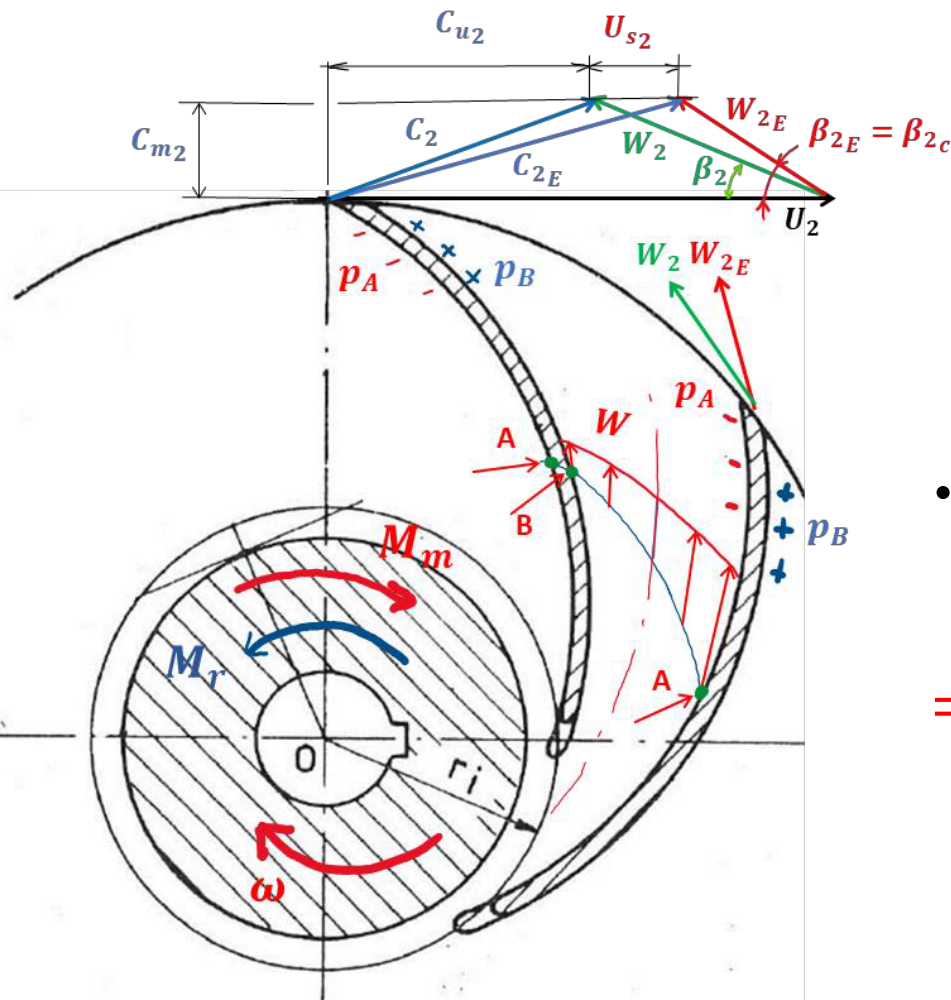
$$\boxed{\frac{gh_t}{U_2^2}} = 1 - \boxed{\frac{C_{m2}}{U_2}} \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

ψ_t è il numero di pressione teorico

ϕ il numero di flusso

$$\psi_t = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

Critica alla teoria euleriana



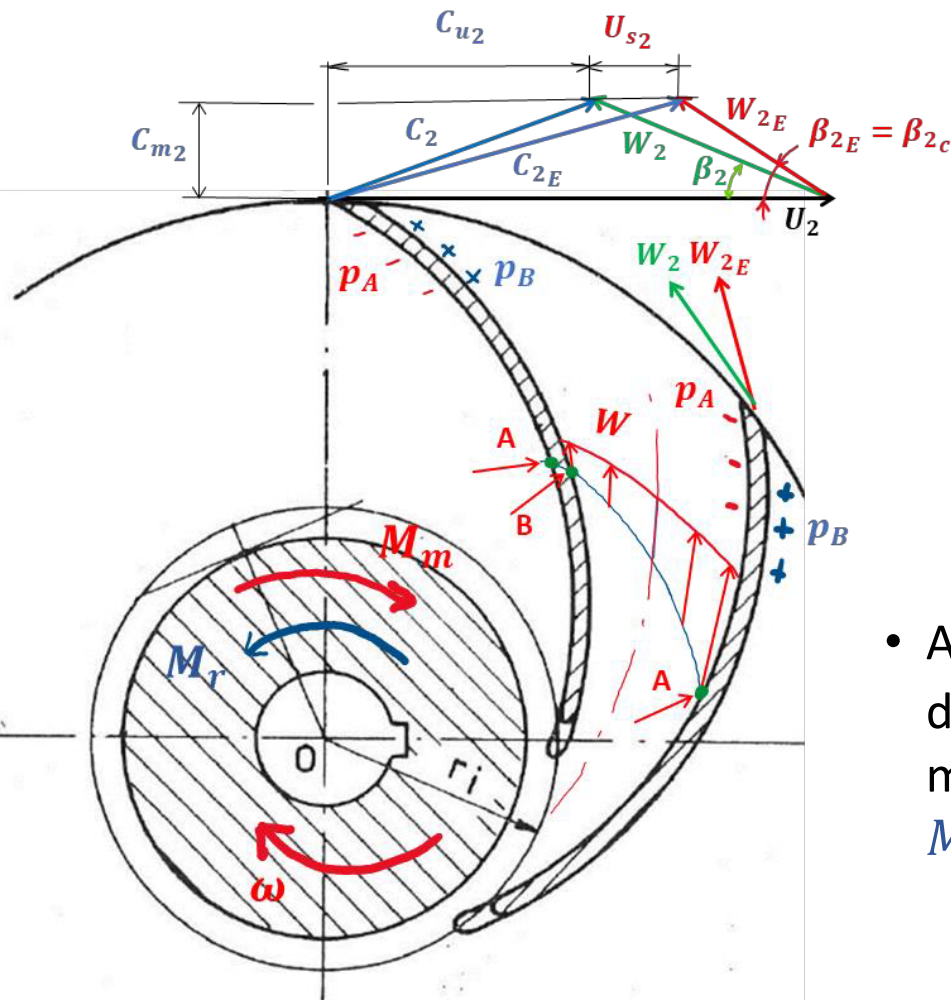
$$\psi_t = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

Da chi dipende il parametro correttivo della teoria euleriana?

- Dipenderà da tutti quei fattori che influenzano il gradiente di pressione circonferenziale $\partial p / \partial \vartheta$
- ⇒ Quindi, dal numero di pale Z : minore è il numero di pale, maggiore sarà lo scarto $\Delta\beta = \beta_{2c} - \beta_2$ e con esso U_{s2}/U_2

$$\Rightarrow \frac{U_{s2}}{U_2} = f\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Critica alla teoria euleriana



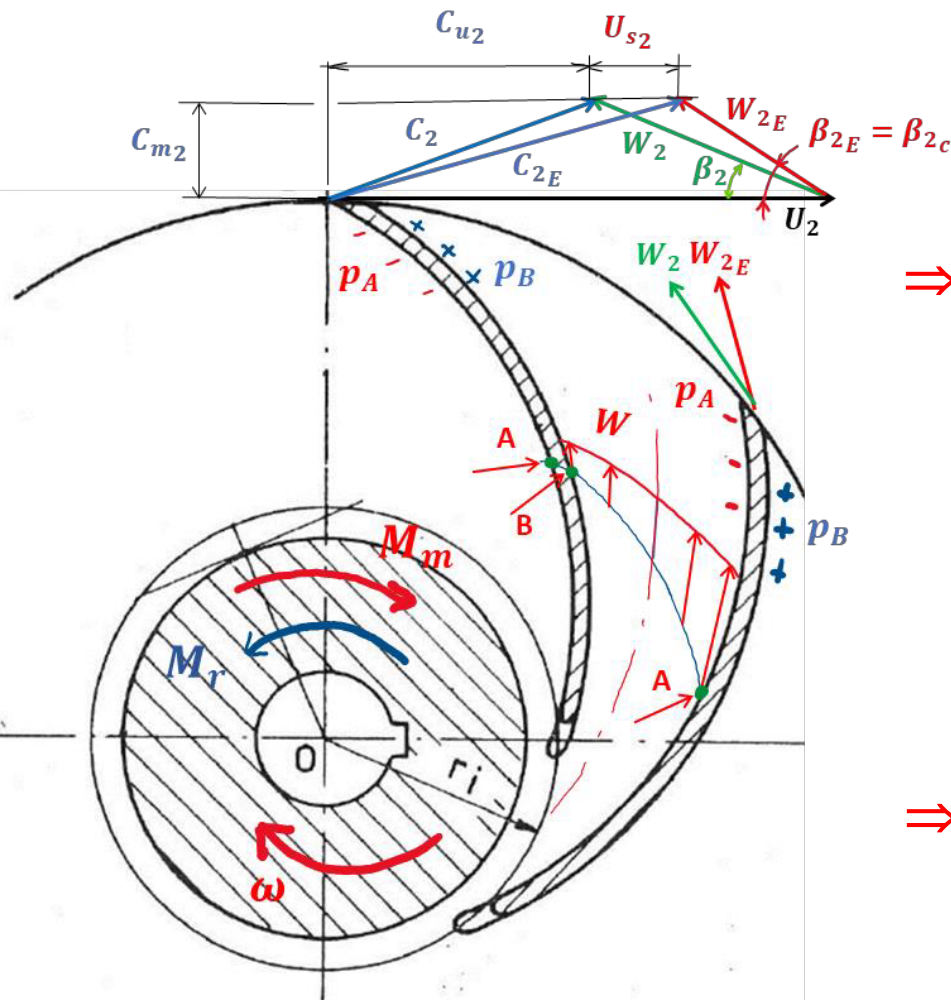
- Ma, a parità del numero di pale Z , il gradiente di pressione circonferenziale $\partial p / \partial \vartheta$ dipende anche dal lavoro gh_t eseguito dalla girante, e quindi dall'angolo β_{2c} del bordo di fuga delle pale:

$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})$$

- All'aumentare di β_{2c} aumenta il lavoro eseguito dalla girante, e con esso, a parità di portata, il momento motore M_m e il momento di reazione M_r e quindi il gradiente di pressione $\partial p / \partial \vartheta$

⇒ La dipendenza dello scorrimento U_{s2}/U_2 da β_{2c} è questa volta diretta: $\frac{U_{s2}}{U_2} = f(\beta_{2c})$

Critica alla teoria euleriana



$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

⇒ In conclusione, da queste essenziali considerazioni risulta che lo scorrimento della corrente relativa U_{s2}/U_2 è **funzione diretta** dell'angolo β_{2c} e **funzione inversa** del numero di pale Z della girante:

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = f\left(\beta_{2c}, \frac{1}{Z}\right)$$

⇒ Tutte le correlazioni suggerite per la determinazione di U_{s2}/U_2 dovranno risultare coerenti con questo risultato

Deviazione della corrente relativa

Equazione del moto: corrente assoluta

- Per determinare il fattore correttivo alla teoria monodimensionale, non si può prescindere dall'analisi del moto del fluido ed in particolare dalle equazioni che esprimono tale moto (**equazioni di Navier-Stokes**)
- Dalla seconda legge della dinamica: $d\vec{F} = dm \vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times \vec{\Omega} = \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{d\vec{F}_s}{dm} + dm\vec{g} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{C} = \nabla \times \vec{C}$ è
la **VORTICITA'** della
corrente assoluta

$\frac{d\vec{F}_s}{dm}$ è la forza di **superficie** per
unità di massa dovuta alle forze
di pressione e di attrito

Equazione del moto: corrente assoluta

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times \vec{\Omega} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

- Si ottiene, riordinando e raggruppando i vari termini, la seguente equazione:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \times (\vec{\Omega}) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz \right) + (\vec{f})$$

la vorticità $\vec{\Omega}$ esprime solo la **rotazione come corpo rigido** della particella

$E = \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz$ è l'energia totale della corrente in J/kg

forza d'**attrito** riferita all'unità di massa del fluido

Equazione del moto: corrente assoluta

$$\cancel{\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} - \vec{c} \times \vec{\Omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz \right) + \vec{f}}$$

- Nell'ipotesi di moto in regime permanente:

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} = 0$$

- Se ammettiamo il fluido aviscoso:

$$\vec{f} = 0$$

- Supponendo che il moto abbia origine da un ambiente ad energia totale costante $E = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz$, **ogni linea di corrente** che da esso origina trasporterà lo **stesso ammontare di energia** (eq. Bernoulli):

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$$

Equazione del moto: corrente assoluta

$$\vec{C} \times \vec{\Omega} = 0$$

Possibili soluzioni

Equazione valida nel sistema di riferimento assoluto a monte della girante, nell'ipotesi di moto stazionario e fluido aviscoso

$$\vec{C} \equiv 0$$

$\vec{C}$ ovunque parallelo a $\vec{\Omega}$ («vortice forzato»)

$\vec{\Omega} = 0$ («vortice libero») moto irrotazionale della **corrente assoluta**

Equazione del moto: corrente relativa

- Le turbomacchine sono però costituite da un organo statorico e da un organo rotante con velocità angolare ω costante attorno a un asse fisso
- Per gli **elementi statorici** l'equazione che ne regola il moto è quella già descritta in precedenza
- Per la **girante** l'equazione che ne regola il moto è quella già descritta in precedenza:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{C}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

Esprimendo $\vec{a}$ in funzione di quella relativa $\vec{a}_R$, e dunque in funzione delle variazioni nel tempo della velocità relativa $\vec{W}$ registrate dal sistema di riferimento che ruota in solido con la girante:

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \times \vec{\Omega}_w + \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$



Deviazione della corrente relativa

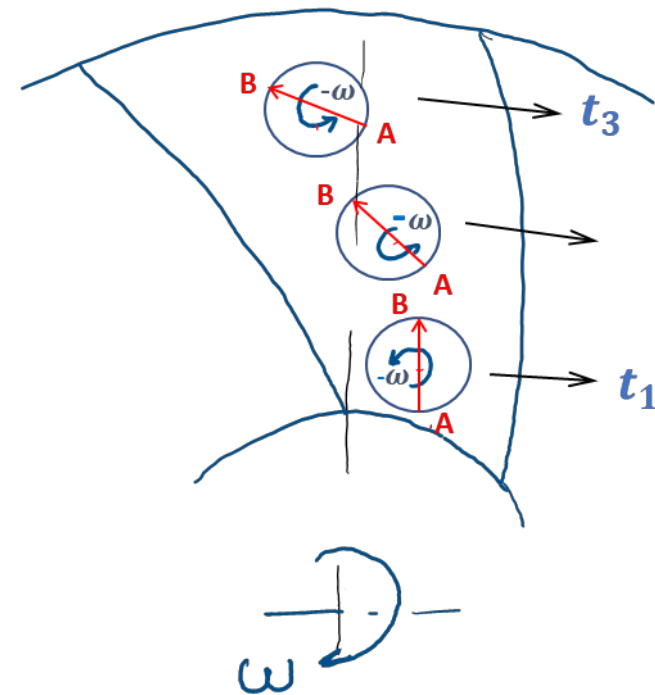
- Si può dimostrare che in ipotesi di moto stazionario e fluido aviscoso, l'equazione si semplifica e diventa:

$$\vec{W} \times (\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega}) = 0$$

una soluzione fondamentale della quale è:

$$\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}}$$

- ⇒ La corrente relativa non è irrotazionale ($\vec{\Omega}_w = 0$), al più può essere a vorticità costante e pari a $-2\vec{\omega}$
- ⇒ Le particelle della corrente relativa ruotano come corpo rigido attorno a un asse parallelo all'asse della girante con una velocità angolare $-\vec{\omega}$, uguale e contraria a quella della girante, mentre si muovono nel condotto interpalare con velocità $\vec{W}$



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

