

Lezione 26

Derivata di un quoziente

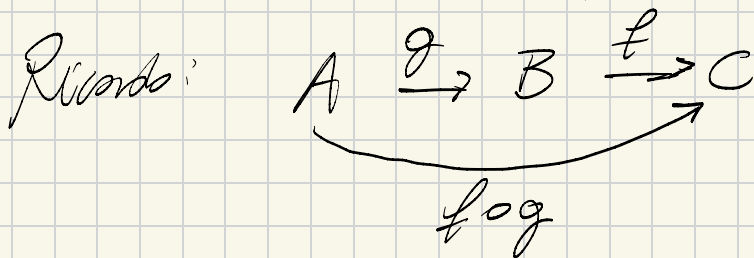
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Dim. esercizio: imitare quanto fatto per il prodotto (facoltativo).

Esempio

$$\begin{aligned} (tg(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x) (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Derivata della composizione



Si ha:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Dim: Esercizio facoltativo.

Esempio

(1) Calcolare $(\sin(x^3))'$.

È del tipo $(f \circ g)(x)$ dove

$$g(x) = x^3$$

$$f(y) = \sin(y)$$

Applico la formula:

$$(\sin(x^3))' = \sin'(x^3) \cdot (x^3)'$$

|

$$= \cos(x^3) \cdot (3x^2)$$

$$\downarrow$$

$$= 3x^2 \cos(x^3)$$

$$(2) \quad (e^{\cos(x)})' = e^{\cos(x)} \cdot (\cos(x))'$$

$$= e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))$$

$$= -\sin(x) e^{\cos(x)}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = \cos(x)$$

$$g'(x) = -\sin(x)$$

$$(3) \quad (e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$g(x) = -x \Rightarrow g'(x) = -1$$

$$(4) \quad (e^{\sin(x^3)})'$$

Questa è la composizione di tre funzioni

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 & \longmapsto & \sin(x^3) & \longrightarrow & e^{\sin(x^3)} \end{array}$$

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = \sin(x^3)$$

$$(f \circ g)'(x) = e^{\sin(x^3)} \cdot (\sin(x^3))'$$

$$3x^2 \cos(x^3)$$

da un esercizio
precedente, oppure
ricordando

$$= e^{\sin(x^3)} \cdot 3x^2 \cos(x^3)$$

$$= 3x^2 \cos(x^3) e^{\sin(x^3)}$$

$$(5) \quad (\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' =$$

$$= \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2}$$

(linearità delle
derivate):

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = c f'$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh(x).$$

(6)

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)'$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \sinh(x)$$

Derivata delle funzioni inverse

Conviene f e suppongo che esista f^{-1} .

Ricordo:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) & \xrightarrow{f^{-1}} & f^{-1}(f(x)) = x \\ \cap & & \cap & & \cap \\ D_f & \xrightarrow{f} & D_{f^{-1}} & \xrightarrow{f^{-1}} & D_f \end{array}$$

*funzione
biettiva* *funzione
biettiva*

So per definizione che

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Applico la formula della composizione

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (x)'$$

Ma $(x)' = 1$, quindi

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Se poniamo $y = f(x)$, ho ottenuto che:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Esempio

$$f = \exp, \quad f^{-1} = \log.$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\ln} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x & \uparrow & y \mapsto \ln(y) \\ & & \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} & & \end{array}$$

Applico la formula con $f(x) = e^x$,

$$f^{-1}(y) = \ln(y):$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= (\ln)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(e^x)' =} \\ &= \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

Osservando che $e^x = y$, ottengo

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

che combinando ora nome alle variabili:

$$\ln'(a) = \frac{1}{a}$$

Esempio.

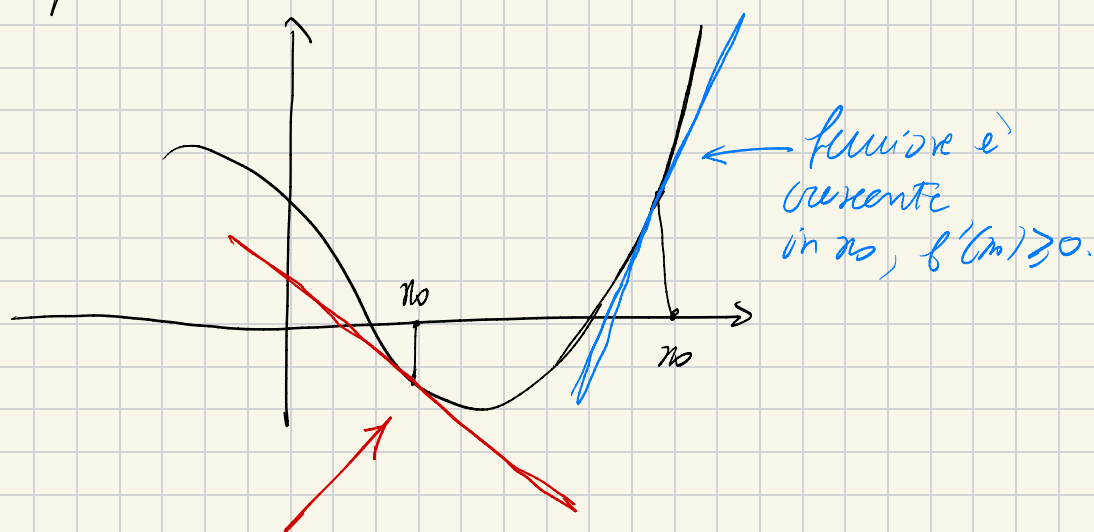
$$\begin{aligned} (\ln(\sin(x)))' &= \frac{1}{\sin(x)} (\sin(x))' \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \\ &= \operatorname{Cotg}(x) \end{aligned}$$

Torniamo agli studi di funzione.
Sappiamo:

$f(x)$ crescente e $f'(x) \geq 0$

$f(x)$ decrescente e $f'(x) \leq 0$

Attenzione Crescente e decrescente si
riferiscono al comportamento di f
in prossimità di un punto x_0 :



la funzione e' decrescente in x_0
 $f'(x_0) \leq 0$

Esempio

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 2}{(x-2)^2} \right)$$

Ricordo:

Domini $x \neq 2$

Segno: $f(x) > 0$ per $x > 1/2$

$f(x) < 0$ per $x < 1/2$

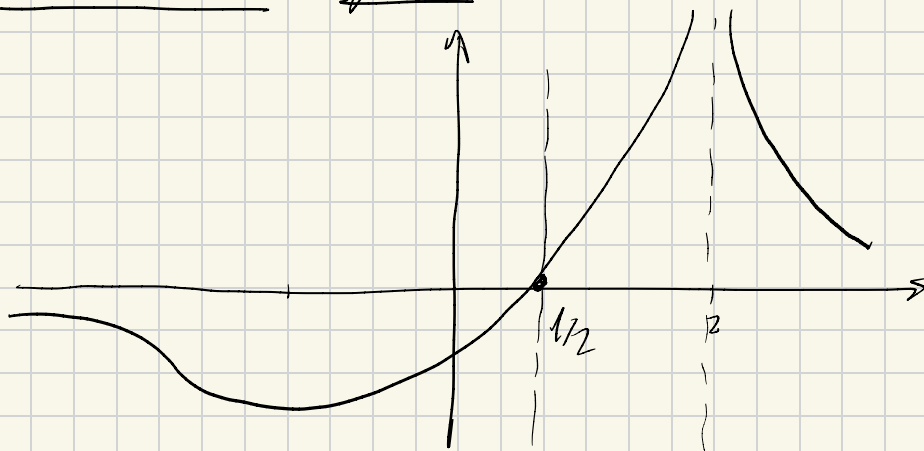
$f(x) = 0$, $x = 1/2$.

Simmetrie: Non evidenti

Limiti: $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Tentativo di grafico



Derivato:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+2}{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)^2}}{x^2+2} \cdot \frac{(x^2+2)' \cdot (x-2)^2 - (x^2+2) \cdot ((x-2)^2)'}{(x-2)^{\cancel{2}^2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+2)(x-2)^2} \cdot (2x \cdot (x-2)^2 - (x^2+2) \cdot 2(x-2) \cdot (x-2)')$$

$$= \frac{2x(x-2)^2 - (x^2+2) \cdot 2(x-2) \cdot (x-2)'}{(x^2+2)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x-2)^2 - (x^2+2) \cdot 2(x-2)}{(x^2+2)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)} (2x(x-2) - 2(x^2+2))}{(x^2+2)(x-2)^{\cancel{2}^2}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - 4x - \cancel{x^2} - 4}{(x-2) \cdot (x^2+2)} = \frac{-4(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}.$$

Studio i segni di quest'ultimo quoziente, cioè studio la disuguaglianza:

$$\frac{-4(x+1)}{(x-2)(x^2+2)} \geq 0.$$



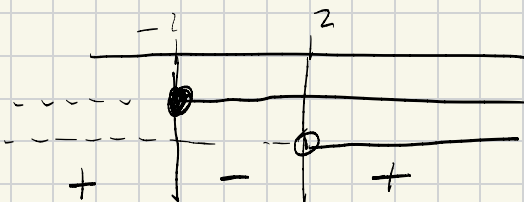
$$\frac{4(x+1)}{(x-2)(x^2+2)} \leq 0 \iff \frac{4(x+1)}{x-2} \leq 0$$

Studio i segni dei fattori:

$$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$$

$$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

$$x^2+2 \geq 0 \text{ sempre}$$



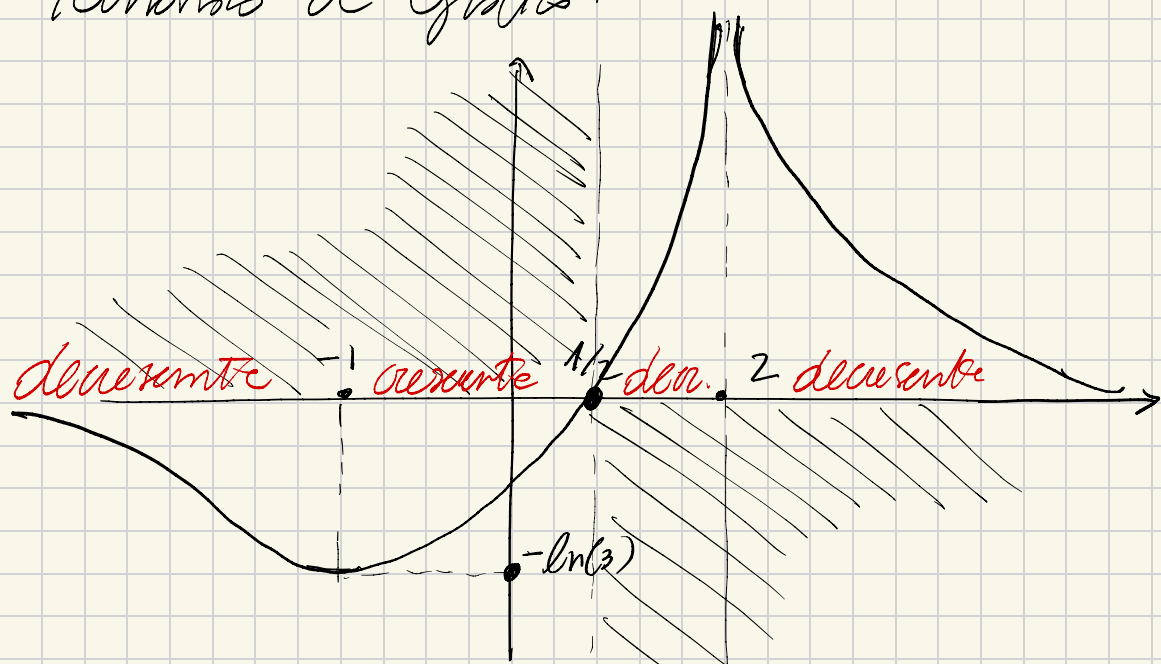
Pero' concludo che

$$\frac{-4(x+1)}{(x-2)(x^2+2)} \geq 0 \iff -1 < x < 2.$$

Quindi:

Tra -1 e 2 la funzione e' crescente,
altamente $x < -1$ oppure $x > 2$,
la funzione e' decrescente.

Provando al grafico:



La funzione ha un minimo in $x = -1$, che

$$\text{vale } \ln\left(\frac{1+2}{(-1-2)^2}\right) = \ln\left(\frac{3}{9}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3^{-1}) \\ = -\ln(3)$$

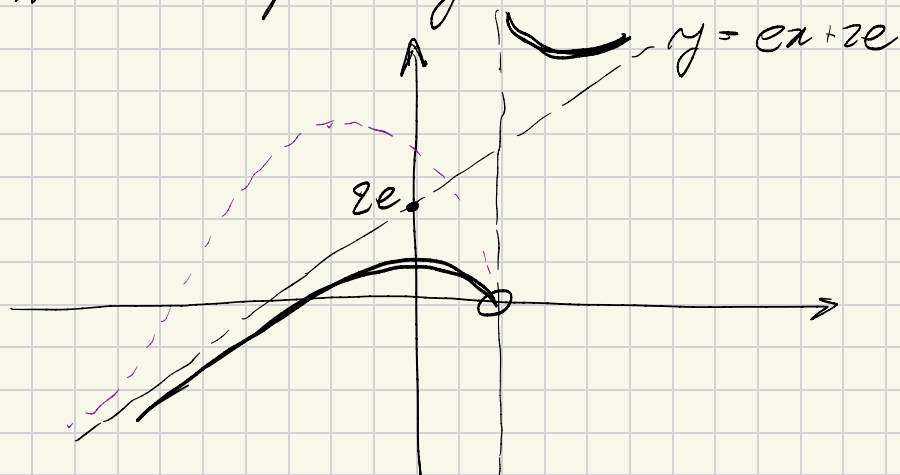
Esempio $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$

Domio $x \neq 1$

Segno: $f(x) > 0$, $x > -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

Asintoto obliquo $y = ex + 2e$.



$$\begin{aligned}
 \left((x+1) \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \right)' &= (x+1)' \cdot \left(e^{\frac{x}{x-1}} \right) + \\
 &+ (x+1) \cdot \left(e^{\frac{x}{x-1}} \right)' = \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} + (x+1) \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)' \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(1 + (x+1) \cdot \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} \right) = \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(1 - \frac{x+1}{(x-1)^2} \right) = \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{(x-1)^2 - (x+1)}{(x-1)^2} \right) \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x^2 - 2x + 1 - x - 1}{(x-1)^2} \right) \\
 &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2} \right) = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x(x-3)}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

Studio il segno della derivata:

$$e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} \geq 0$$

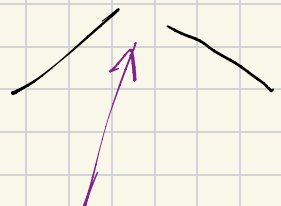
Equivalememente,

$$x(x-3) \geq 0 \iff x \leq 0, x \geq 3.$$

Perciò, la funzione è crescente per $x \leq 0$ e $x \geq 3$, ed è decrescente tra 0 e 3.

Quindi, ha un massimo per $x=0$, minimo $x=3$

crescente 0 decrescente 3 crescente



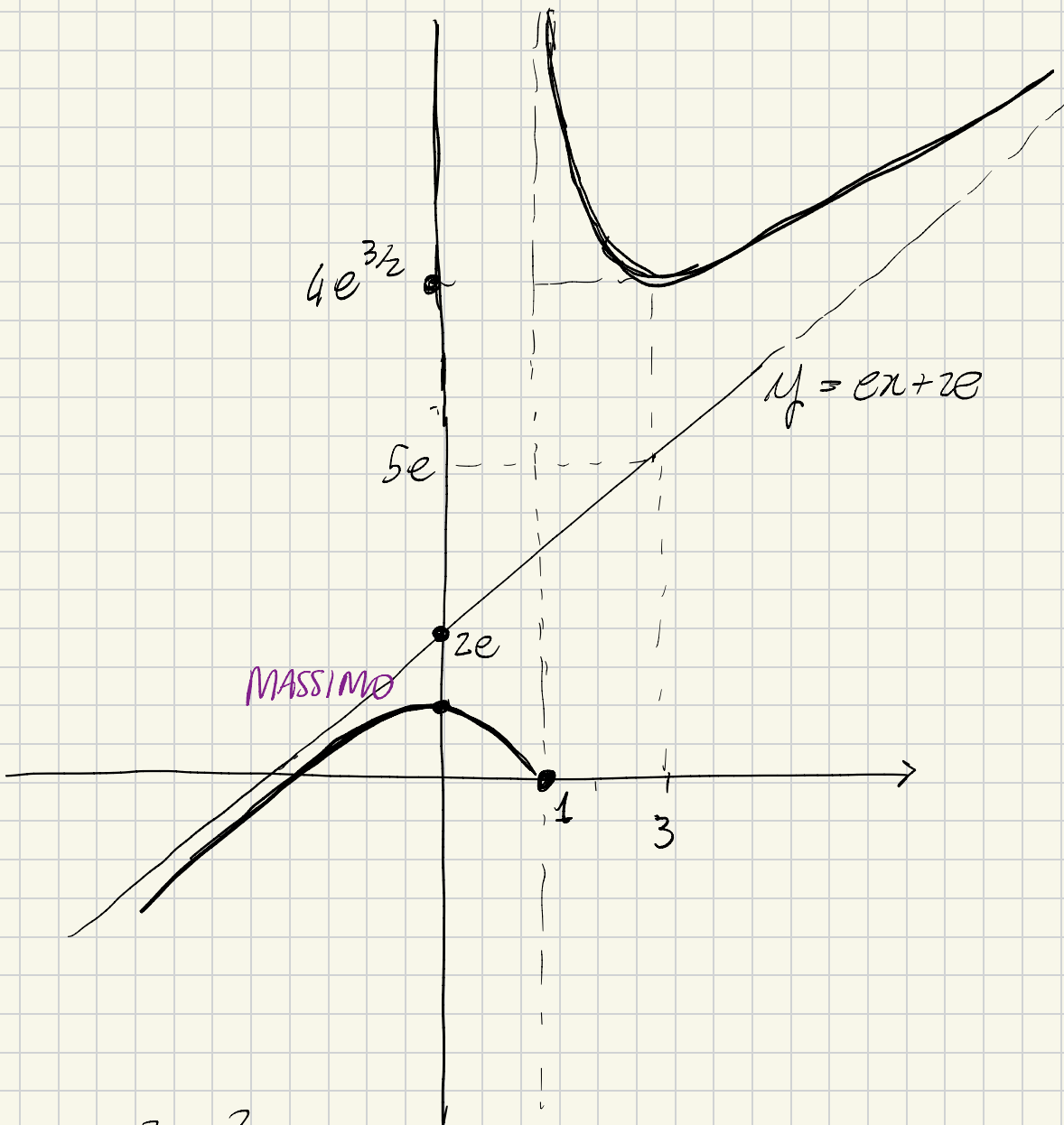
Massimo per $x=0$



minimo per $x=3$

$$f(x) = e^{\frac{x}{x-1}} (x+1)$$

$$f(0) = 1, \quad f(3) = 4e^{\frac{3}{2}}.$$



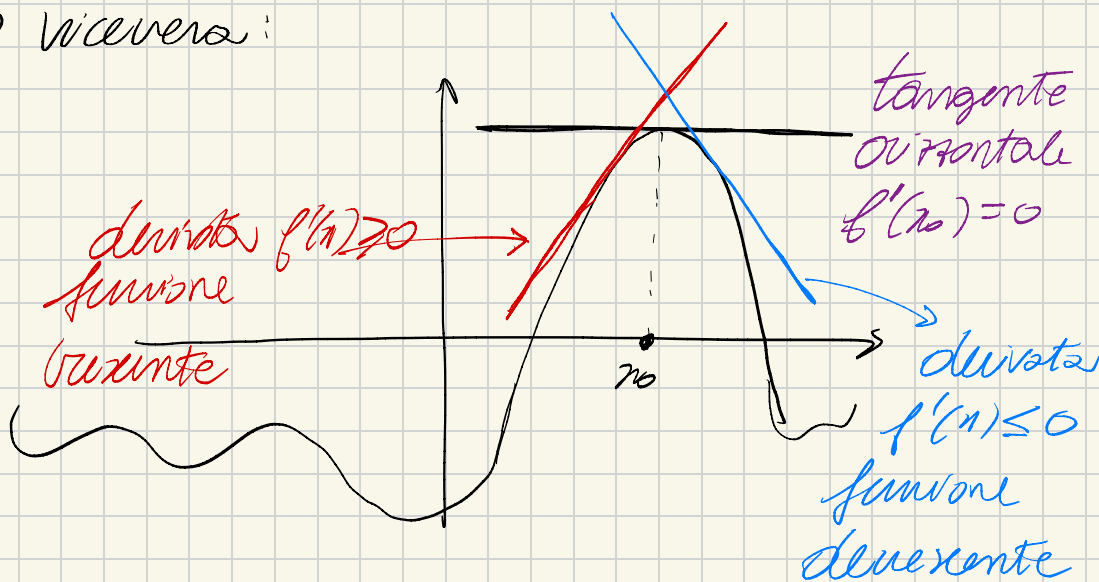
$$4e^{3/2} \stackrel{?}{\geq} 3e + 2e = 5e$$

$$16 \cdot e^3 \geq 25 \cdot e^2 \Rightarrow 16e \geq 25 \quad \text{vero per } e > 2.$$

Osservazione Se $f'(x)$ è una funzione continua, i punti x_0 del dominio tali che

$$f'(x_0) = 0$$

sono punti di massimo o minimo locali, in prossimità di $f(x_0)$ la funzione è prima crescente e poi decrescente o viceversa:



Opp Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$, allora

$$f'(n) = 0.$$

(per il teorema degli zeri).