Lezione 25

Proprietà delle derivate

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

c è una costante in $\mathbb{R}$

Si ottengono tutte come applicazione immediata della definizione

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Usare che il limite di una somma è la somma dei limiti e che le costanti si tirano fuori dai limiti.

Cioè:
la derivata di una somma è la somma delle derivate; posso portare fuori la costante dalle derivate

Esempio

(Uso $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$)

$$\frac{d}{dx}(3x^2-5x+2) = \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 6x + 5$$

la derivata di una funzione costante è 0:

se $f(x) = c$, c costante

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$$

perché $f(x_0+h) - f(x_0) = c - c = 0$ per qualunque h.

0

Esempio

$$\frac{d}{dx}\left(5x^3 - 2x^2 + 3x\right) = 15x^2 - 4x + 3.$$

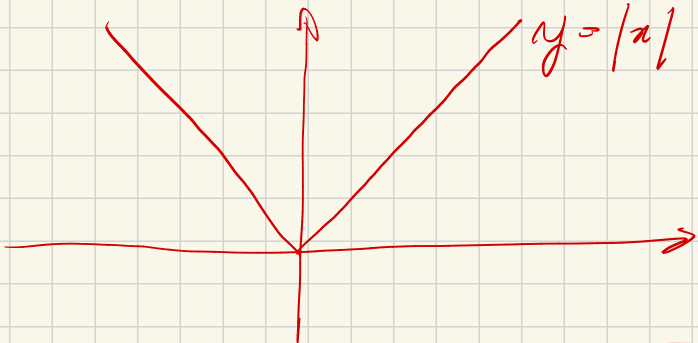
Teorema Se f è una funzione derivabile in x_0 (cioè: la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 esiste) allora f è continua in x_0.

<u>Attenzione</u>: non vale il viceversa!

Cioè ci sono funzioni continue, che non sono derivabili:

<u>Esempio</u> (di funzione continua non derivabile in un punto):

$$f(x) = |x|.$$



f è continua in 0

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

Se $x > 0$, $f'(x) = (x)' = 1$

Se $x < 0$, $f'(x) = (-x)' = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$$

Sono diversi, quindi il limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste, dunque f non è derivabile in 0. (dove però è continua).

Dimostrazione del teorema

Devo mostrare che se f è derivabile, allora è continua.

Ipotesi derivabile in x_0 dice che

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito. Perciò

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0,$$ dunque

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se così non fosse, poiché il denominatore tende a 0, il limite non potrebbe essere finito.

<u>Esempio</u> $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$

Calcolo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} =$$

$$= e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^x.$$

LIMITE NOTEVOLE.

Oss Possiamo anche usare gli sviluppi in serie:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(e^x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{\underset{3\cdot 2!}{\underset{\shortparallel}{3!}}} + \frac{4x^3}{\underset{4\cdot 3!}{\underset{\shortparallel}{4!}}} + \dots$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x} = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\text{Sviluppo di } e^x}$$

$$= e^x$$

Esempi:

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin(x))' &= \cos(x) \\ (\cos(x))' &= -\sin(x) \end{aligned}}$$

Esercizio Dimostrare le formule precedenti (usare la trigonometria per riscrivere ad esempio il $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$ e usare limite notevole per il seno, simile per il coseno).

Proposizione $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \left(\frac{d}{dx} f\right) g + f \left(\frac{d}{dx} g\right)$.

Regola di Leibnitz

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

Dim. Calcolo la derivata di $f \cdot g$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (fg)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

(aggiungo e tolgo $f(x) g(x+h)$)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{g(x+h)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \lim_{h \to 0} \underbrace{f(x)}_{f(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} =$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) \blacksquare$$