

Lezione 24

Esercizio

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 2}{(x-2)^2} \right).$$

Domande $(x-2)^2 \neq 0$ (esistenza del denominatore)
 $\frac{x^2 + 2}{(x-2)^2} > 0$ (esistenza del logaritmo)

$$(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)^2} \geq 0, \quad \forall x \quad (x \neq 2).$$

$$D = \{x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

! $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$

Simmetrie:

$$\therefore f(x) = f(-x) \quad ?$$

$$\ln \left(\frac{x^2 + 2}{(x-2)^2} \right) = \ln \left(\frac{(-x)^2 + 2}{(-x-2)^2} \right)$$

$$\frac{x^2+2}{(x-2)^2} = \frac{x^2+2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = x^2 + 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Non e' pari.

$$(o) \quad f(x) = -f(-x).$$

$$\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) = -\ln\left(\frac{x^2+2}{(x+2)^2}\right)$$

$$\frac{x^2+2}{(x-2)^2} = \frac{(x+2)^2}{x^2+2}$$

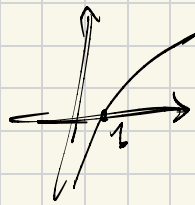
per $x=0$ ho
 $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$.

Non e' verificata per tutti gli x ,
 quindi la funzione non e' dispari.

Puoi' la funzione non presenta l'immunita'
 evidente (non e' ne' pari ne' dispari).

Segn: $\ln\left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2}\right) \geq 0. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{(x-2)^2} \geq 1$$



$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{(x-2)^2} \geq \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}$$

$(x-2)^2 > 0$ sempre
nel dominio

↳ intendo: per tutti
gli x appartenenti al
dominio,

$$\Leftrightarrow x^2+2 \geq (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 \geq x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow +4x \geq 2$$

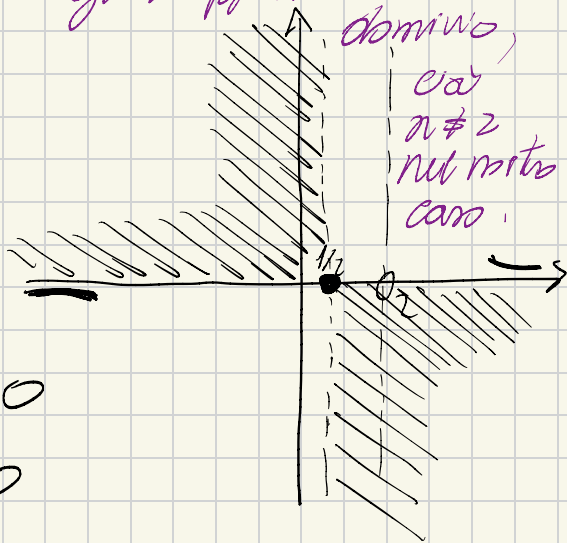
$$\Leftrightarrow x \geq 1/2$$

Perciò:

$$x > 1/2, \quad f(x) > 0$$

$$x < 1/2, \quad f(x) < 0$$

$$x = 1/2, \quad f(x) = 0.$$



Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2+2}{(x-2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2-4x+4} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2(1+2/x^2)}{x^2(1-4/x+4/x^2)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + 2/n^2}{1 - 4/n + 4/n^2} \right) = 0.$$

Stesso calcolo (verifica per esaurimento)

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{(n-2)^2} \right) = 0.$$

Asintoti verticali:

L'unico pto di discontinuità del dominio è $x=2$.

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{(n-2)^2} \right) = +\infty$$

Stesso calcolo

$$\lim_{n \rightarrow 2} \left(\frac{n^2 + 2}{(n-2)^2} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^-} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{(n-2)^2} \right) = +\infty$$

(notare che sia per $n \rightarrow 2^+$ che

per $n \rightarrow 2^-$, vale

$$\lim_{n \rightarrow 2^\pm} n^2 + 2 = 6, \quad \lim_{n \rightarrow 2^\pm} (n-2)^2 = 0^+$$



Esercizio

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

Domanda $x \neq 1$ (esistenza della funzione).

Simmetrie: Non ci sono simmetrie evidenti (valore che $f(x) \neq f(-x)$ e $f(x) \neq -f(-x)$ come funzioni (cioè: esistono almeno due valori

a e b nel dominio tali che
 $f(a) \neq f(-a)$ e $f(b) \neq -f(-b)$

Segno $f(x) \geq 0$

$$(x+1)e^{\frac{x}{x-1}} \geq 0$$

$e^{\frac{x}{x-1}} \geq 0 \quad \forall x$ nel dominio,
dunque $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

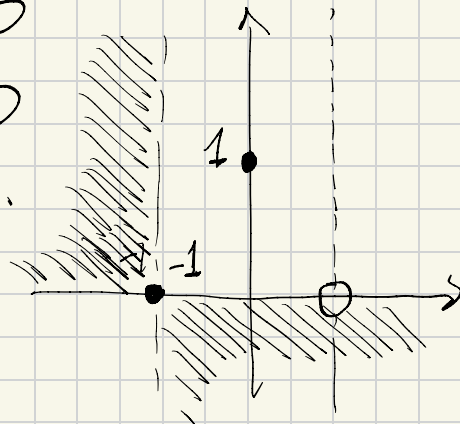
$$(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Anal:

$$x > -1, \quad f(x) > 0$$

$$x < -1, \quad f(x) < 0$$

$$x = -1, \quad f(x) = 0.$$



Intersezione con gli assi

$$x = 0, \text{ allora } f(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$x = -1, \quad f(x) = 0$$

Asintoti orizzontali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) e^{\frac{x}{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) e^{\frac{x}{x(1-1/x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) e^{\frac{1}{1-1/x}} = +\infty \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) e^{\frac{1}{1-1/x}} = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Mi chiedo quindi se esistono:

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) e^{\frac{x}{x-1}}}{x} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{n}{n-1}} = e$$

Anche

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{n}{n-1}} = e.$$

Abbiamo $m = e$. Cerco q , n esiste, calcolando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(n) - mn) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)e^{\frac{n}{n-1}} - en)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{n \cdot e^{\frac{n}{n-1}}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{e^{\frac{n}{n-1}}}_{\rightarrow e} - \underbrace{en}_{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{ne^{\frac{n}{n-1}} - en}_{\infty - \infty} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n}{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} en \left(\frac{e^{\frac{n}{n-1}}}{e} - 1 \right) + e =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} en \left(e^{\frac{n}{n-1} - 1} - 1 \right) + e =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} en \left(e^{\frac{n - (n-1)}{n-1}} - 1 \right) + e =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} en \cdot \underbrace{\left(e^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right)}_{(*)} + e. \quad (*)$$

*Avremo una formula indeterminata
ma più semplice da trattare
usando i limiti notati:*

Poniamo $t = \frac{1}{n-1}$ e noto che se

$n \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0$; noto anche se

$$t = \frac{1}{n-1} \Rightarrow n-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow n = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{t+1}{t}.$$

Sostituisco n con t in $(*)$ e
continuo il calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{\frac{1}{x-1}} - 1) + e =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} e \cdot \left(\frac{t+1}{t} \right) \cdot (e^t - 1) + e =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} e \cdot \underbrace{(t+1)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^t - 1}{t} \right)}_{\rightarrow 1} + e = 2e.$$

Calcoliamo il limite (esatto)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{t \rightarrow 0^-} e \cdot (t+1) \frac{e^t - 1}{t} + e = 2e.$$

Quindi, abbiamo un solo asintoto obliquo, che vale

$$y = ex + 2e.$$

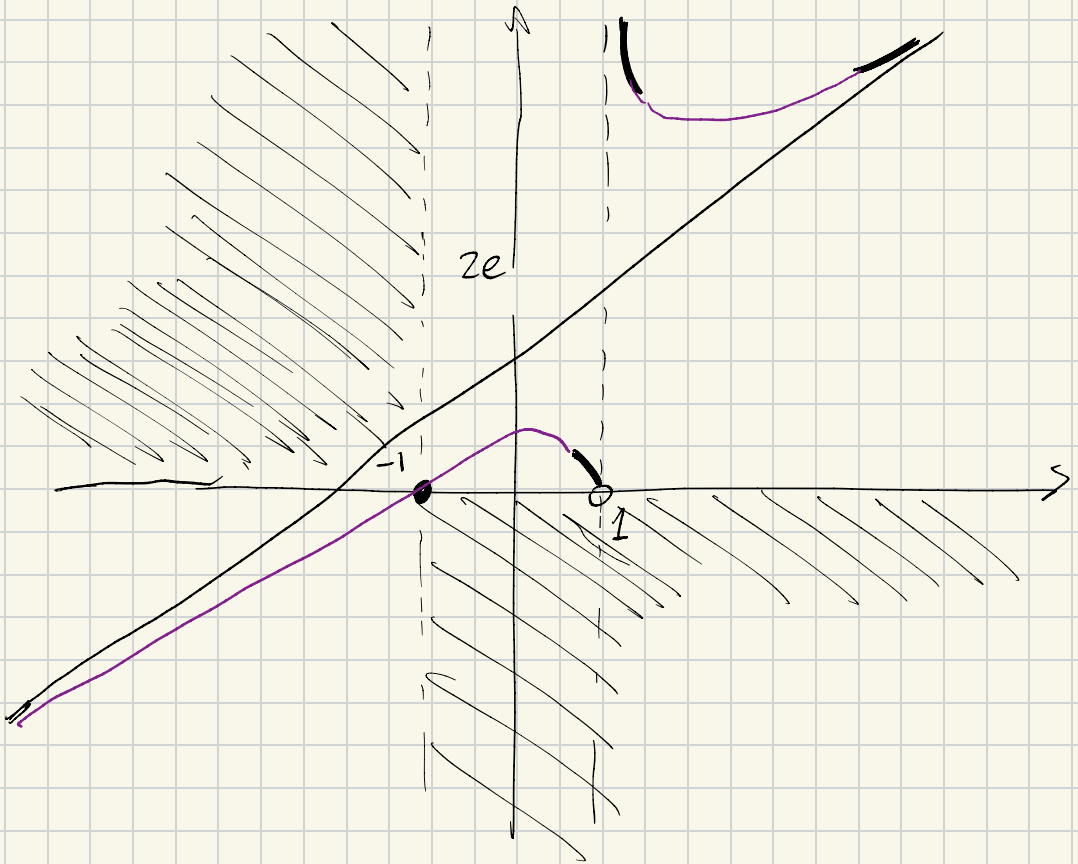
Asintoto verticale:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \cdot e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty$$

parti $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$,

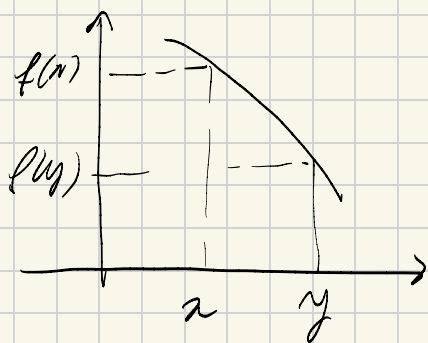
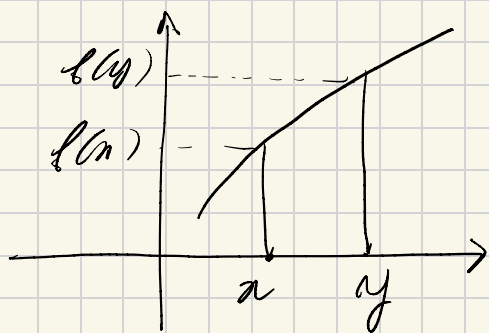
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{x}{x-1}} = 0$

parti $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$.



Crescenza e decrescenza di funzioni

Diciamo che $f(x)$ è crescente (in un sottoinsieme del dominio) se $f(x) < f(y)$ per ogni $x < y$, ed è decrescente se $f(x) > f(y)$, $\forall x < y$.



Esempio. Cosa succede se la funzione è crescente: questo vuol dire che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

perché: se $y > x$, allora $f(y) > f(x)$
quindi $y - x > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0$.

Invece, se $f(x)$ è decrescente, allora

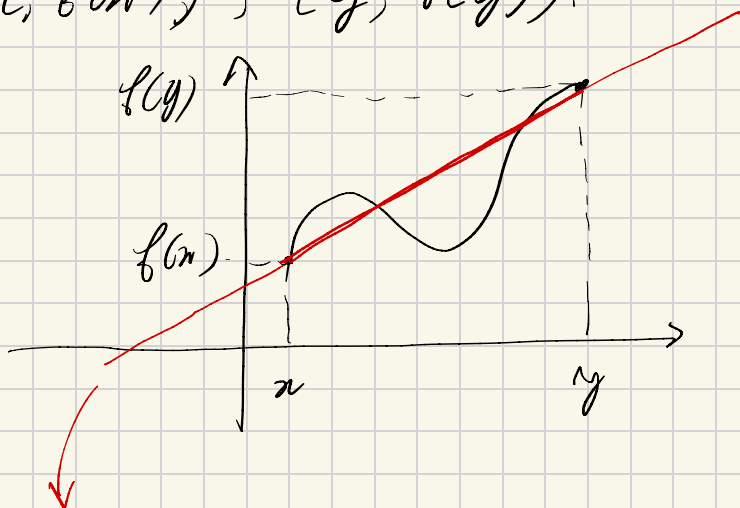
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

però se $y - x > 0$, cioè $y > x$, allora
 $f(y) < f(x) \Rightarrow f(y) - f(x) < 0$.

Osservo che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

è il coefficiente angolare della retta
 che passa per i punti del piano
 $(x, f(x))$, $(y, f(y))$:



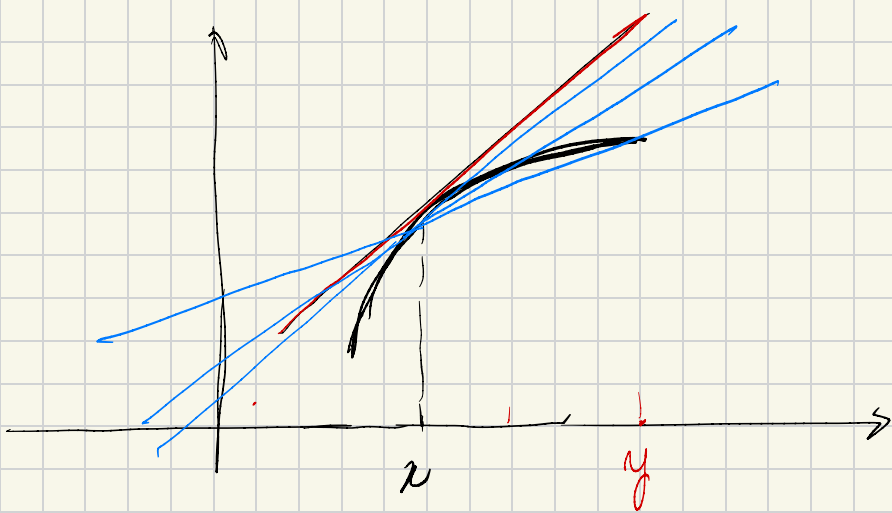
Coefficiente angolare: $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = m$

Verifica: la retta è del tipo $y = mx + q$ perché $x \neq y$. Sostituendo in $y = mx + q$:

$$\begin{cases} f(x) = mx + q \\ f(y) = my + q \end{cases}$$

$$f(y) - f(x) = m(y - x) \Rightarrow m = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Nota ora che se y si avvicina a x , allora il coefficiente angolare della retta calcolato sopra si avvicina al coefficiente angolare della tangente a $f(x)$ nel punto $(x, f(x))$.



Stanno quindi dicendo che, se esiste,
il

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

è il valore del coefficiente angolare
della retta tangente al grafico di
 $f(x)$ nel punto $(x, f(x))$.

Def. Fissato $x_0 \in D = \text{dominio di } f$. Se

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

esiste ed è in valore finito, chiamo questo limite la derivata di f in x_0 , denoto

$$f'(x_0), \left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0), \dot{f}(t).$$

Oss.

Riscrivo y come $y = x_0 + h$

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

RAPPORTO INCREMENTALE

Quindi, la derivata è il limite dei rapporti incrementali.

Esempio Calcolare la derivata di
 $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$

Dalla definizione,

BINOMIO DI NEWTON

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{a^n} + \binom{n}{1} \cancel{a^{n-1}} \cdot h + \binom{n}{2} \cancel{a^{n-2}} h^2 + \dots + \cancel{h^n} - \cancel{a^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} (n \cdot \cancel{a^{n-1}} + h \cdot \binom{n}{2} \cancel{a^{n-2}} + \dots + h^{n-1})}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (n a^{n-1} + h \binom{n}{2} a^{n-2} + h^2 \dots + \dots + h^{n-1}) =$$

$$= n a^{n-1}$$

Proof:

$$\boxed{\frac{d}{da} (a^n) = n a^{n-1}}$$