Conclusione dell'esercizio di ieri:

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ $\quad rg\, A_a = \dim Im f_a = 3 \Rightarrow Im f_a = \mathbb{R}^3$ è suriettiva

$\dim Ker f_a = 3-3=0 \Rightarrow Ker f_a = \{\vec{0}\}$ è iniettiva

$B_{Im f_a} = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad B_{Ker f_a} = \emptyset$ $\quad \Downarrow$

$\dim Im f_a = 3$ $\quad \dim Ker f_a = 0$ $\quad$ è biiettiva

isomorfismo

$Ker f_a \cap Im f_a = \{\vec{0}\}$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

Se $a=1$ $\quad B_{Ker f_1} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\dim Ker f_1 = 2$

non è iniettiva

$B_{Im f_1} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ $\dim Im f_1 = 1$

non è suriettiva

non è biiettiva

$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{Ker f_1}^{2} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}_{Im f_1}^{1} = \mathbb{R}^3 \text{ perché}$$

$$rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix} = 3$$

Per $a=1$ $Ker f_1$ e $Im f_1$ sono in somma diretta perché $\dim(Ker f_1 \cap Im f_1) = 2+1-3=0$

$B_{Im f_{-1}} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \dim Im f_{-1} = 2$ $\quad \boxed{a=-1}$

non è suriettiva $\Rightarrow$ non è biiettiva

$B_{Ker f_{-1}} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ non è iniettiva

$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}_{Im f_{-1}} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{Ker f_{-1}} = \mathbb{R}^3 \text{ perché}$$

$$3 = rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

c) È biiettiva se e solo se $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \Longleftrightarrow rg\, A_a = 3$

d) Esistono dei valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che $Ker f_a$ e $Im f_a$ sono in somma diretta?
Per tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ $Ker f_a$ e $Im f_a$ sono in somma diretta.

e) Determinare due basi di $\mathbb{R}^3$ B_1 e B_2 tali che $\quad a=1$

$$A_{B_1,B_2,f_1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim Im f_1 = rg\, A_1 = 1$
$\dim Ker f_1 = 2$

$B_1 = \{v_1, \underbrace{v_2, v_3}\}$ in modo che $Ker f_1 = \langle v_2, v_3\rangle$

Essendo $B_{Ker f_1} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \Big/\!\!\Big/ \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{Ker} f_1} \right\} \qquad \begin{array}{cccc} v_2 & 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$

$$B_2 = \{w_1, w_2, w_3\} \qquad w_1 = f(v_1) = A_1 \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix} \qquad a=1 \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} \qquad rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_{B_1, B_2, f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 \qquad f(v_1) = w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$

$v_2 \qquad f(v_2) = \vec{0} = 0 \cdot w_1 + 0 w_2 + 0 w_3$

$v_3 \qquad f(v_3) = \vec{0} = 0 \cdot w_1 + 0 w_2 + 0 \cdot w_3$

Nota bene:

1) V uno spazio vettoriale $\qquad id_V : V \longrightarrow V \qquad id_V(v) = v$

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$A_{B_V, B_V, id_V} = \mathbb{I}_n$$

2) $f : V \longrightarrow W$ lineare $\quad B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad A = A_{B_V, B_W, f}$

$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f(-)} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \cdot -} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$\downarrow$ è lineare e biettiva

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Cosa succede se componiamo due applicazioni lineari

$$\begin{array}{ccccc} n & & m & & p \\ V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & Z \\ v & \longmapsto & f(v) & \longmapsto & g(f(v)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{dopo} & \\ & \downarrow & \\ V & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ v & \longmapsto & g(f(v)) \end{array}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^p$$

1. $f : \overset{n}{V} \longrightarrow \overset{m}{W}$
2. $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$
3. $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$

$\Longrightarrow A = A_{\underline{B_V}, B_W, f}$

$A \in M_{\underline{m}, n}(\mathbb{R})$

$$V^n \xrightarrow{g\circ f} Z^p$$

① $g: W^m \to Z^p$

② $B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \Rightarrow B = A_{B_W, B_Z, g}$

③ $B_Z = \{z_1, \dots, z_p\}$

$B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$

$$A_{B_V, B_Z, g\circ f} = \underset{p\times m}{B}\ \underset{m\times n}{A} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

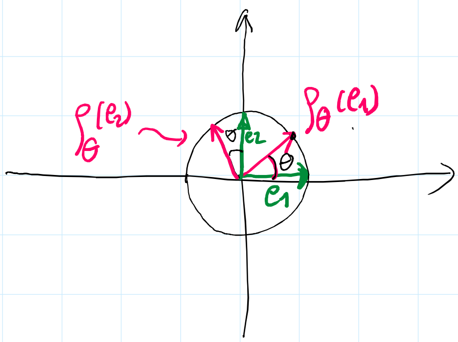
$$\boxed{\begin{matrix} g\circ f \\ B\cdot A \end{matrix}}$$

Esercizio: Se $f: V \to W$ e $g: W \to Z$ sono lineari, allora $g\circ f: V \to Z$ è lineare.

① $g\circ f(\vec{0}) = g(f(\vec{0})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$

② ③ $\}$ per casa

Rotazioni del piano: $V = \mathbb{R}^2$



$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1} = R_{\theta_1+\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

Osservazione: Se $f: V \to W$ lineare biiettiva e $f^{-1}: W \to V$ la sua inversa

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad A = A_{B_V, B_W, f} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile

$B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad B = A_{B_W, B_V, f^{-1}}$

$$\underset{B_V}{V} \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f^{-1}} \underset{B_V}{V} \qquad \begin{array}{l} f^{-1}\circ f = id_V \\ B\cdot A = \mathbb{I}_n \end{array} \Longrightarrow B = A^{-1}$$

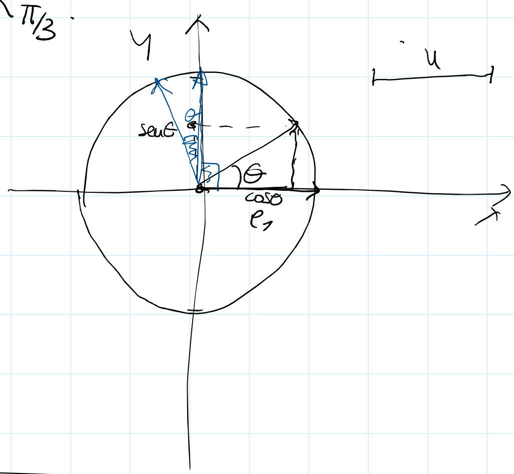
Esempio: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\qquad R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = \mathbb{I}_2$$

Esercizio: scrivere le matrici $R_{\pi/4}$ $\quad R_{\pi/3}$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



MINORI

Definizione: data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si chiama **minore di A** una matrice ottenuta da A eliminando alcune righe e alcune colonne.

Esempi: $A = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$ $\qquad (1 \ \ 2) \qquad (3 \ \ 4)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$

$A = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad (1 \ \ 2 \ \ 3) \qquad \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \ \begin{matrix} \cancel{3} \\ \cancel{2} \end{matrix}\right)$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & \cancel{2} \end{pmatrix}$

Proposizione: se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $rg A = r$, allora r è l'ordine massimo di un minore invertibile.

Esempio:

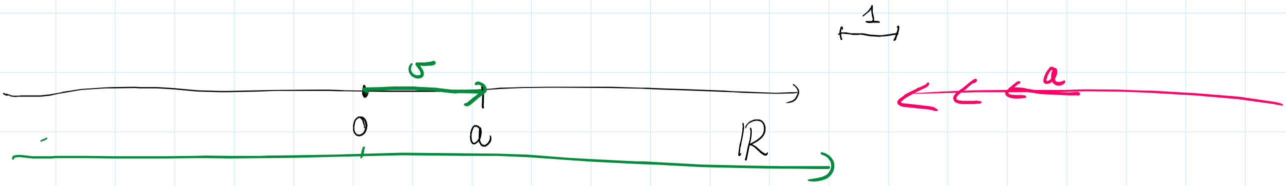
$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{4} \end{pmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il minore si trova $r = rg A$ ci sono r righe lin indip. } minore invertibile
" " r colonne lin. indip.

Determinante = determina se una matrice è invertibile.

$$\det : M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \det A \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

$n = 1$ $\quad A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\quad A = (a)$ $\quad a \in \mathbb{R}$ $\quad \det(a) = a$



A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A = a \neq 0$

$|\det A| = |a|$ = lunghezza del vettore a

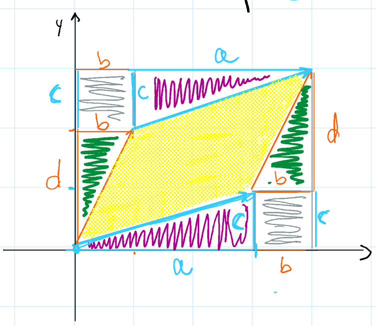
Segno del determinante individua un orientamento

+ equiorientato con la base canonica

− è orientato nel verso opposto.

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad \det A = ad - bc$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

$$A_{v_1 v_2} = (a+b)(c+d) - \cancel{2}\frac{ac}{2} - \cancel{2}\frac{bd}{2} - 2bc =$$

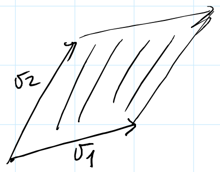
$$= \cancel{ac} + bc + ad + \cancel{bd} - \cancel{ac} - \cancel{bd} - 2bc = ad - bc \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad A = (v_1\ v_2)$

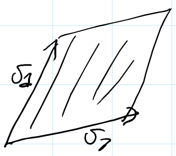
A è invertibile $\iff rg A = 2 \iff$ 2 colonne lin. indipendenti $\iff$

$|\det(A)|$ = Aree del parall. costruito usando le 2 colonne $\neq 0$

$\det A > 0$



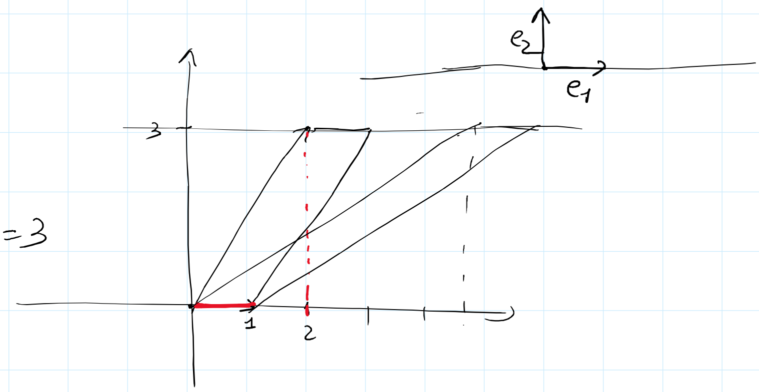
$\det A < 0$



Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3$



$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad (-1)^{i+j}$ $\quad \begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$

Sviluppo 1° riga

$\det A = + ad - bc = ad - bc$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}$

$\det A = -bc + da = ad - bc$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}$

Sviluppo del determinante k-esima riga

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det(A_{ki})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ki} è il minore ottenuto da A eliminando la riga k-esima e la colonna i-esima

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

h-esima colonna

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih} \det(A_{hi})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppo 1° riga

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{2} & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ 2 & \cancel{0} & 1 \end{matrix}$$

$$\det A = 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ 3 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{2} \\ 2 & 0 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 - 4 - 6 = -9$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\det A = 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 0 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 1 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-5) - 0 + 1 = -10 + 1 = -9$$

$$\det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 18 & 21 & 1 \end{array}\right) = 1 \det A = -9$$