



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria euleriana

Corso di Macchine 1

Agenda

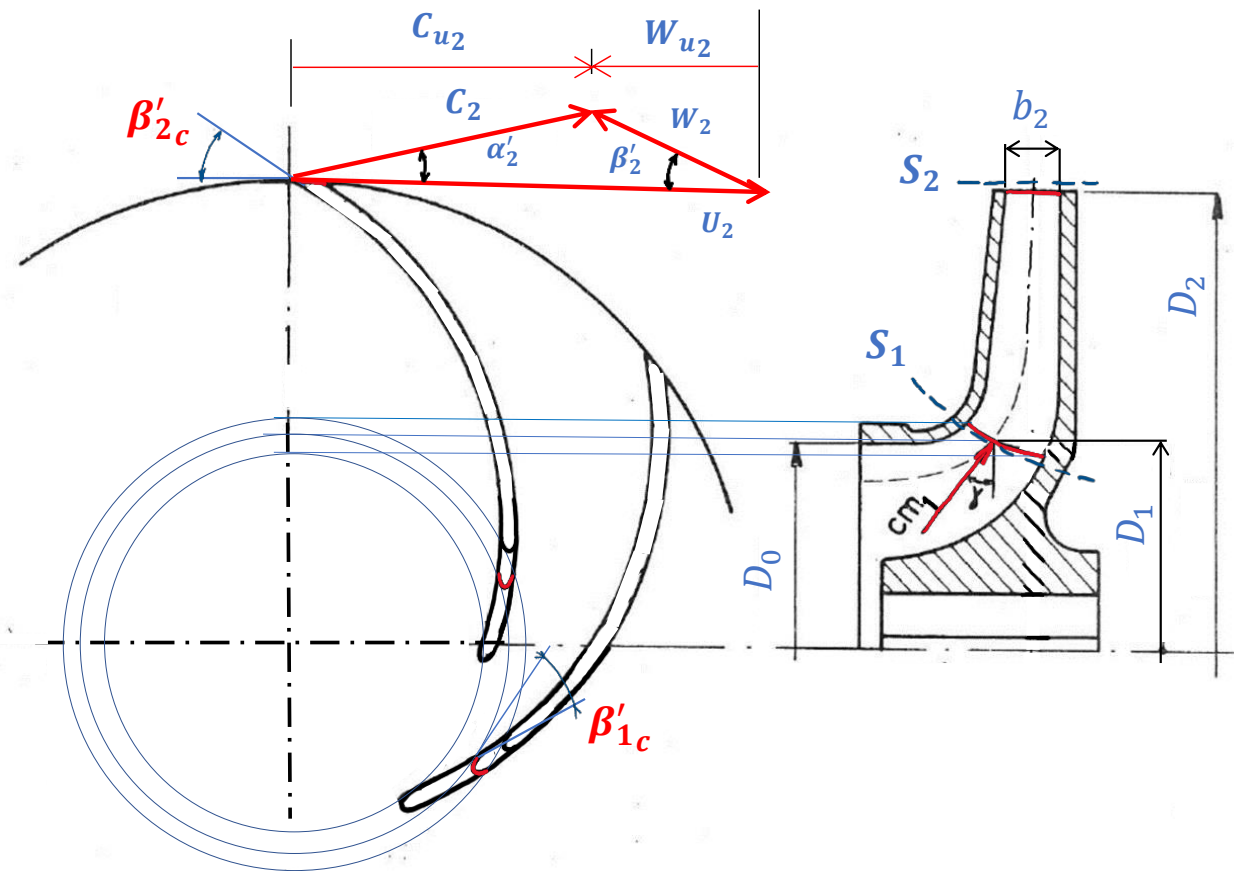
- ▶ La teoria Euleriana
- ▶ Rappresentazione grafica
- ▶ Lo scambio energetico: i contributi





La teoria Euleriana

Teoria euleriana



- Per determinare il lavoro

$$\Delta H^0 = (R_2 C_{u2} - R_1 C_{u1}) \omega$$
 eseguito dalla girante di una turbomacchina operatrice su 1kg di fluido è necessario determinare la velocità tangenziale C_u del fluido su due sezioni: S_1 e S_2 , disposte immediatamente a monte e a valle della girante, rispettivamente.

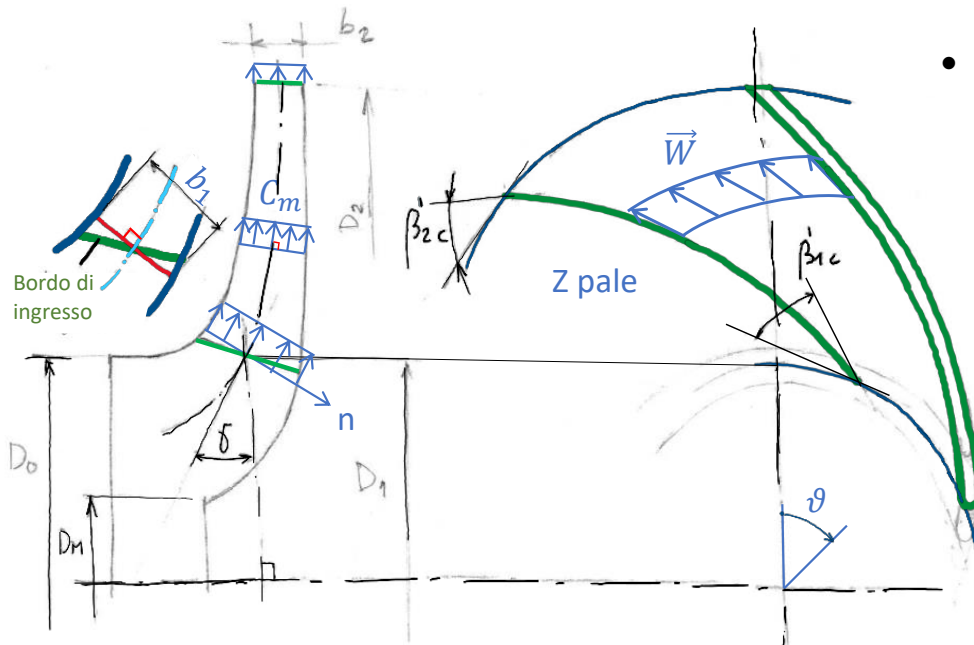
Le velocità tangenziali medie C_{u1} e C_{u2} derivano dalla composizione dei moti relativo e di trascinamento:

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

riassunti dai rispettivi triangoli delle velocità.

- Non sono note a priori le velocità relative $\vec{W}_1$ e $\vec{W}_2$: occorre pertanto una teoria per descrivere il moto relativo $\vec{W}$.

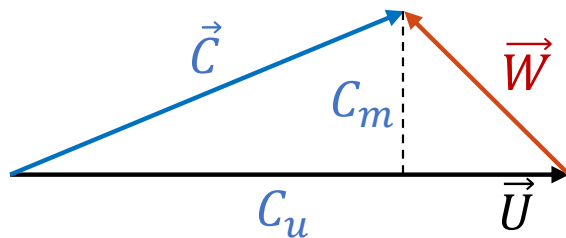
Teoria euleriana



- La **teoria euleriana** o monodimensionale suppone la velocità relativa $\vec{W}$, la pressione p e ogni altra grandezza inerente al deflusso, possano **variare solo** nella direzione del deflusso, e dunque ($W_m = C_m$):

$$\frac{\partial(W, p, T, \dots)}{\partial \vartheta} = 0 \quad \frac{\partial C_m}{\partial n} = 0$$

- La componente meridiana $W_m = C_m$ della velocità relativa o assoluta si deduce dunque dall'equazione della portata:



$$C_m = \frac{Q_m}{\rho A}$$

Ma come si valuta l'area??

Teoria euleriana

- All'uscita della girante la superficie di una pompa centrifuga è cilindrica:

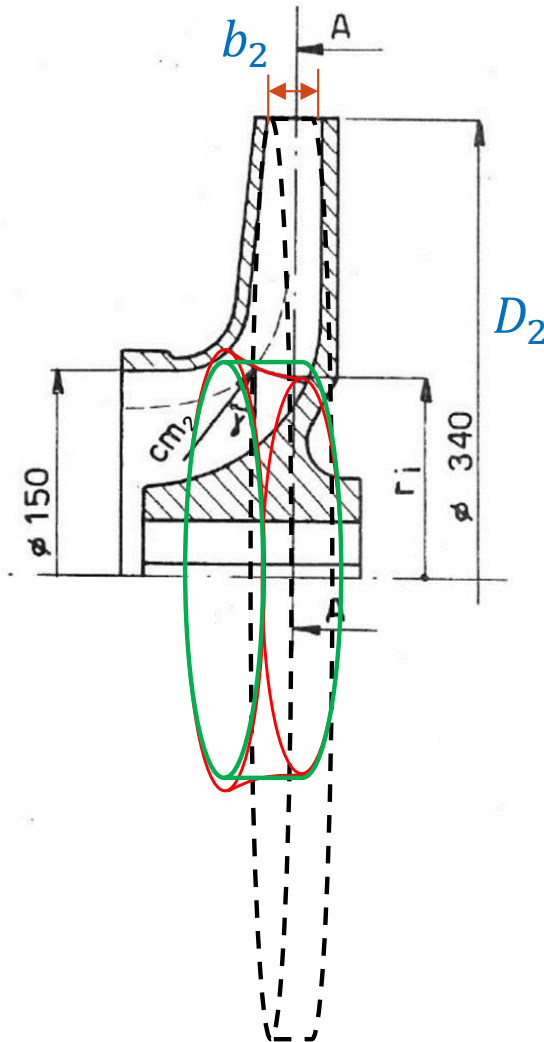
$$A_2 = \pi D_2 b_2$$

- Le altre superfici di attraversamento non sono perfettamente cilindriche ma vengono approssimate con superfici cilindriche:

$$A \approx \pi D b$$



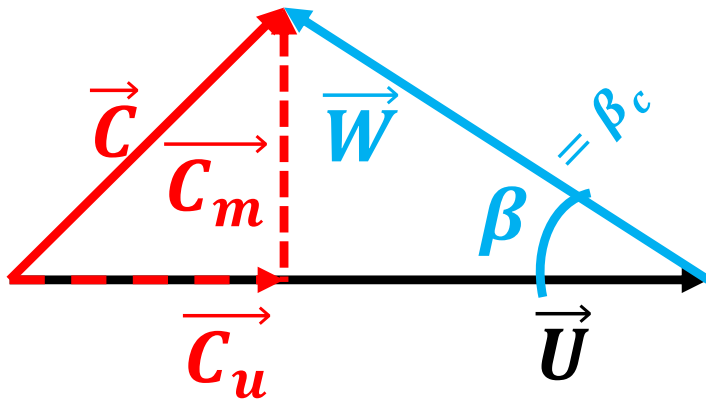
$$C_m = \frac{Q_m}{\rho A} = \frac{Q_m}{\rho \pi D b} = \frac{Q_v}{2 \pi r b}$$



Teoria euleriana

$$\Delta H^0 = (R_2 \underset{?}{C_{u_2}} - R_1 \underset{?}{C_{u_1}}) \omega$$

Secondo la **teoria monodimensionale** le pale **guidano perfettamente** il fluido $\rightarrow$ per una distanza radiale r dall'asse della girante l'angolo di inclinazione β della velocità relativa $\vec{W}$ rispetto alla direzione tangenziale è pari a quello locale della pala β_c , e si conserva lungo ϑ

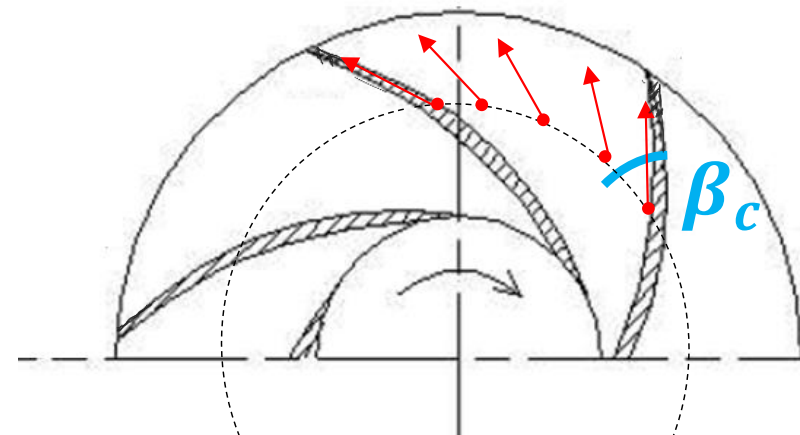


$$C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

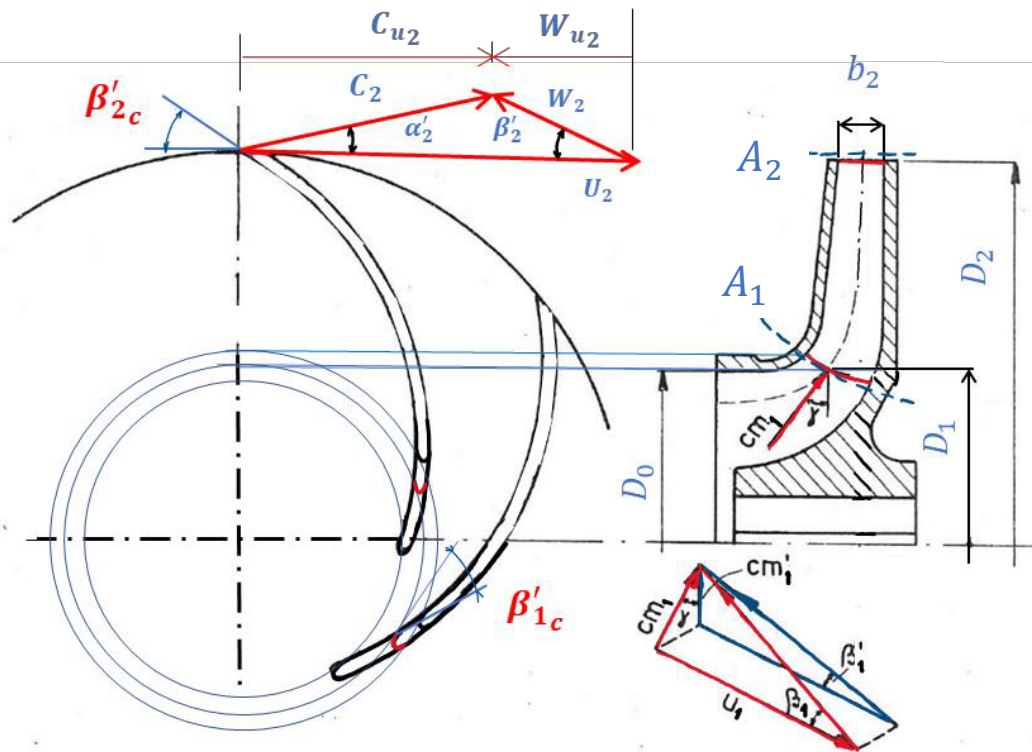


$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0$$



Teoria euleriana



$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

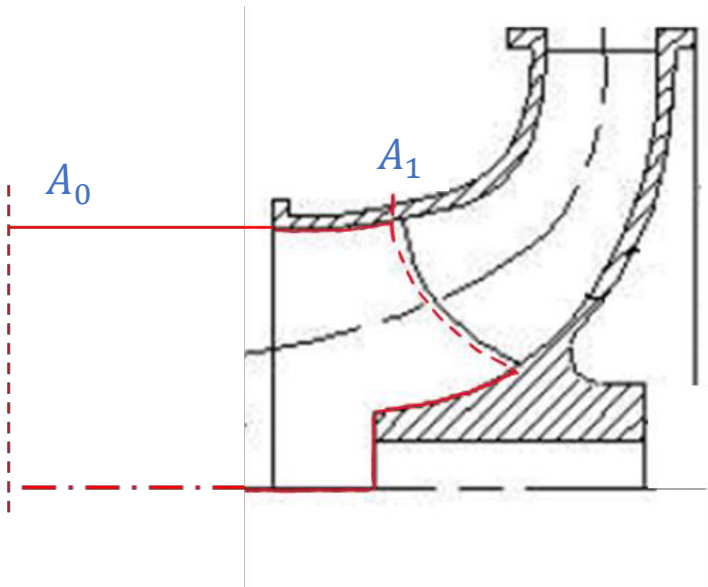
$$C_m = \frac{Q_m}{\rho \pi D b} = \frac{Q_v}{2 \pi r b}$$

$$C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

- Per il computo dello scambio di energia ΔH^0 interessano le componenti tangenziali C_u della velocità assoluta nelle sezioni A_1 e A_2 , **immediatamente** a monte e valle della girante per poter isolare interamente il solo contributo della sola girante.
- La componente C_{u2} è determinabile tramite la geometria della girante.
- Per la C_{u1} è necessario determinare quella che avviene a monte della sezione A_1 in quanto non risente ancora dell'azione dinamica delle pale della girante



Scambio energetico euleriano



$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

- Si supponga che la corrente assoluta pervenga alla sezione A_0 con moto puramente assiale: $C_{u0} = 0$
- Si applichi il principio della variazione del momento della quantità di moto al volume di controllo $V_{A_0-A_1}$ compreso tra le sezioni A_0 e A_1 .

$$M_{A_0-A_1} = \overline{R_1 C_{u1}} - \overline{R_0 C_{u0}}$$

- Se $C_{u0} = 0$ sulla sezione A_0 :

$$M_{A_0-A_1} = \overline{R_1 C_{u1}} - \cancel{\overline{R_0 C_{u0}}} = \overline{R_1 C_{u1}}$$

- Ma $M_{A_0-A_1} = 0$, non essendoci nulla nel volume di controllo $V_{A_0-A_1}$ che possa interagire con il fluido $\Rightarrow C_{u1} = 0$.



Esempio Numerico

POMPA CENTRIFUGA

$$D_0 = 100 \text{ mm}$$

$$D_1 = 106 \text{ mm}$$

$$D_2 = 280 \text{ mm}$$

$$b_1 = 22 \text{ mm} = B_1$$

$$b_2 = 10 \text{ mm} = B_2$$

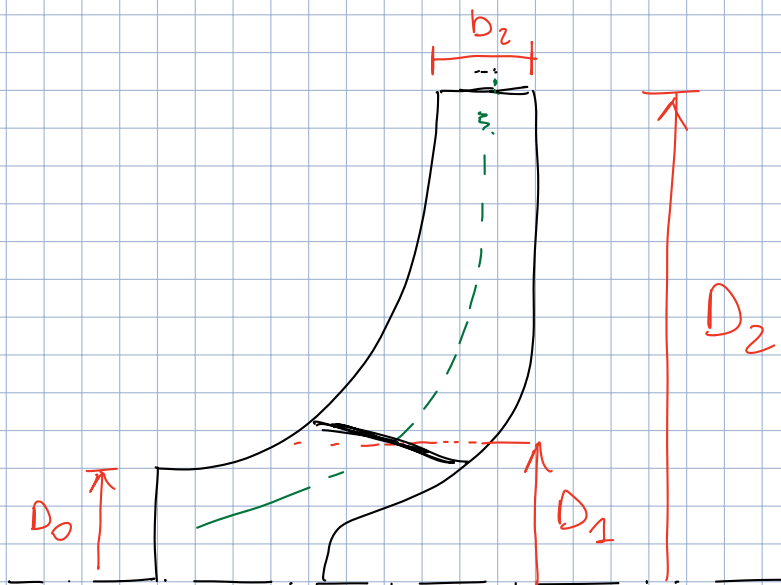
$$\beta_{1c} = 22^\circ$$

$$\beta_{2c} = 30^\circ$$

$$Z = 7 \text{ PALE} = \text{n}^\circ \text{ di pale}$$

$$S = 4 \text{ mm} = \text{spessore pala}$$

$$n = 1450 \text{ giri/min} = 1450 \text{ rpm}$$



Q_v, h , forme des triangles des vitesses (U, C, w)?

TUTTO È IN STATO STAZIONARIO e SIAMO ALLE CONDIZIONI DI PROGETTO o CONDIZ. DI DESIGN!

NOTA: ALLE COND. DI PROGETTO LE PERDITE SONO MINIME! PERDITE DELLA MACCHINA o MEGLIO IN QUESTO CASO DELLA GIRANTE → QUINDI → PERDITE DI INCIDENZA MINIME!

DALLA TEORIA EULERIANA

Q_v è legato a C_m

$g'h$ è legato a U_2, C_{u2}, U_1, C_{u1}

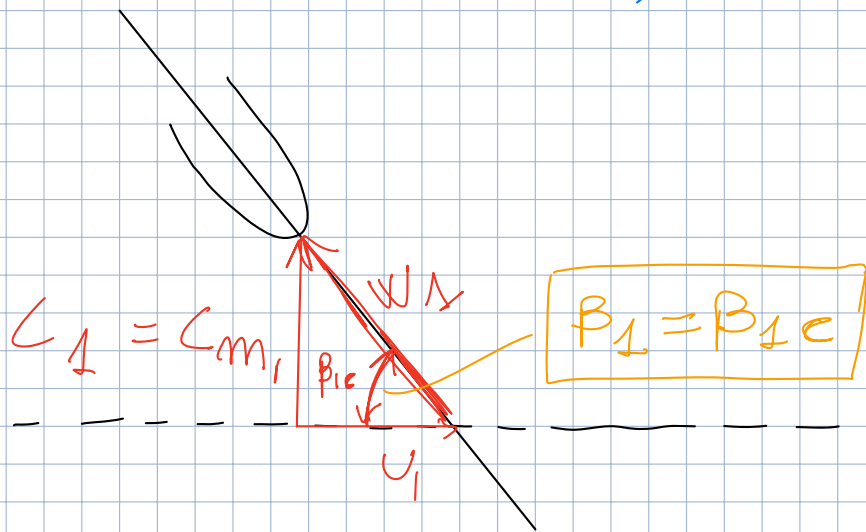
$\beta_1 = \beta_{1c} \rightarrow$ ANGOLO DEL FLUIDO = ANGOLO

$\beta_2 = \beta_{2c}$

COSTRUTTIVO
DELLA PALA!

DA DOVE PARTO A RISOLVERE?

PARTO DAL TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ
IN INCRESSO (1) PERCHÉ $C_{w1} = 0$



$$U_1 = \omega \cdot R_1 = \frac{2\pi M}{60} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{2\pi \cdot 1450}{60} \cdot \frac{106 \cdot 10^{-3}}{2} = 8,05 \frac{m}{s}$$

$C_1 = C_{m1}$ come lo calcoliamo?

$$C_{w1} = U_1 - C_{m1} \cotg \beta_{1c} \text{ ma } C_{w1} = 0$$

$0 = U_1 - C_{m1} \cotg \beta_{1c}$ lo U_1 e β_{1c} lo conosco

$$C_{m1} = U_1 \tg \beta_{1c} = 8,05 \cdot \tg 22^\circ = 3,25 \text{ m/s}$$

$\stackrel{!}{=} C_1$

$$W_1 = \frac{C_{m1}}{\sin \beta_{1c}} = \frac{3,25}{\sin 22^\circ} = 8,68 \text{ m/s}$$

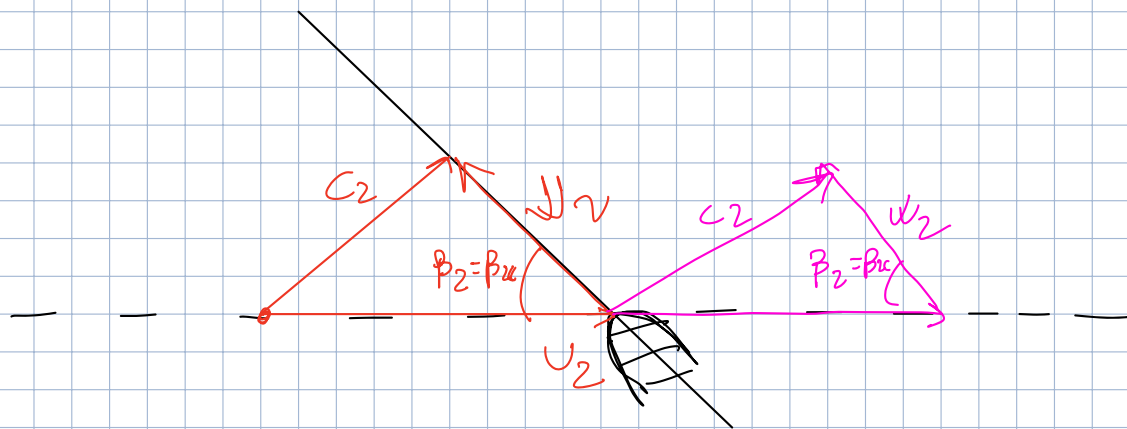
$$Q_{vOTT} = C_{m1} \cdot A_1 = C_{m1} \cdot \pi D_1 b_1$$

↓
OTTIMALE

$$\begin{aligned} &\stackrel{!}{=} 3,25 \cdot 0,007326 = 0,02381 \text{ m}^3/\text{s} \\ &\stackrel{!}{=} 23,81 \text{ l/s} \end{aligned}$$

NOTO IL TRIANGO DELLE VEL. ALL'INGRESSO
e SAPENDO $c_{u1} = 0$ POSSO TROVARE Q_v !

PER LO SCAMBIO ENERGETICO DEVO RISOLVERE
IL TRIANGOLO DELLE VEL. ALL'USCITA!



$$U_2 = \omega R_2 = \frac{2\pi n}{60} \cdot \frac{D_2}{2} = 21,26 \text{ m/s}$$

$$c_{m2} = \frac{Q_v}{\pi D_2 b_2} = 2,73 \text{ m/s}$$

$$c_{u2} = U_2 - c_{m2} \cot \beta_{2c} = U_2 - c_{m2} \frac{\cos 30}{\sin 30}$$

$$= 16,53 \text{ m/s}$$

$$w_2 = \frac{c_{m2}}{\sin \beta_{2c}} = 5,46 \text{ m/s}$$

LO SCAMBIO ENERGETICO TEORICO EULERIANO

$$g h_{t,E} = U_2 c_{u2} - U_1 c_{u1} = U_2 c_{u2} = 21,26 \cdot 16,53$$

$$= 351,43 \text{ J/Kg}$$

= lavoro fatto dalla girante sull'unità
di massa del fluido secondo la teor. Euler

POSSO TROVARE LA POTENZA?

POTENZA RICHIESTA DALLA MACCHINA IN
COND. EULERIANE

$$P_{(E)} = \sum Q_{V,OTT} \cdot g h_t = 8371,4 \text{ W}$$

IL PROBLEMA È β_{1C} !

β_{1C} = ANGOLO COSTRUTTIVO DELLA PALA

! = TRANG DELLE VEL.

! = ANGOLO NEL PIANO DI DEFLUSSO

che è DIVERSO DALL'ANGOLO CHE
VEDO NELLA VISTA CIRCONFERENZIALE!



Rappresentazione Grafica

Scambio energetico euleriano

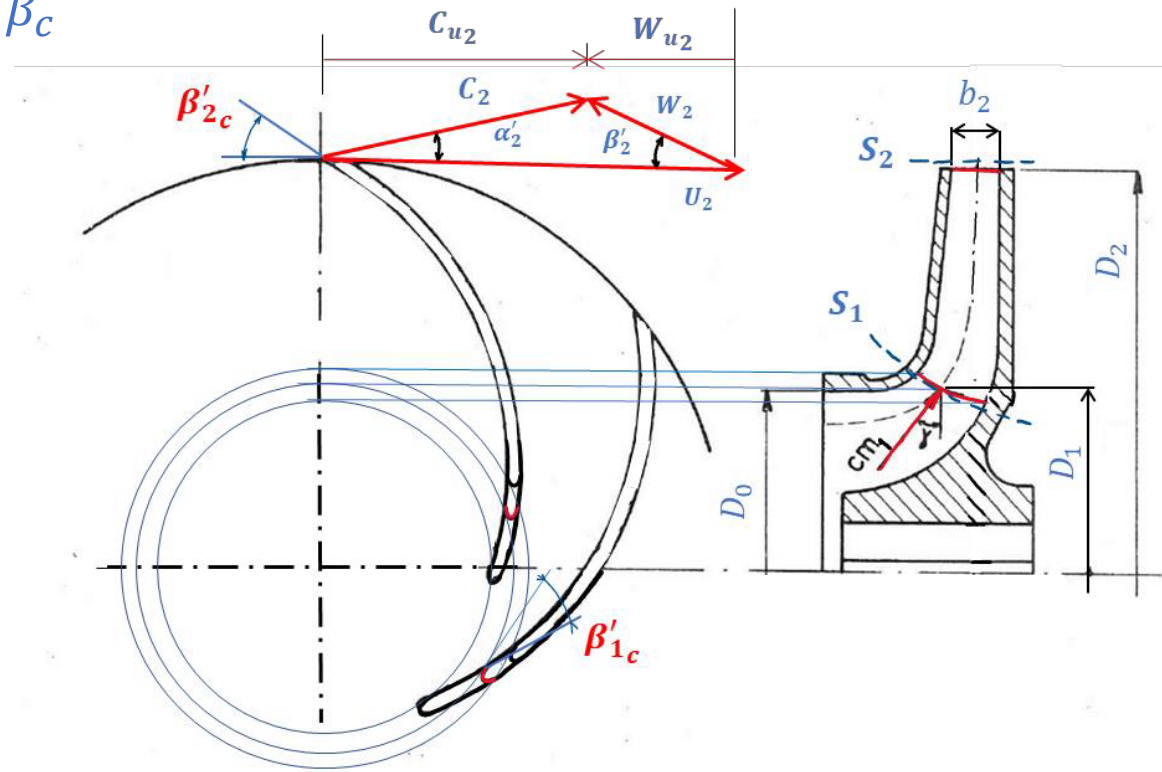
- L'approccio monodimensionale viene anche adoperato:
 - in sede di progetto per il **dimensionamento preliminare** delle giranti più semplici, quelle con pale a semplice curvatura.
 - per **stimare** in prima approssimazione le **condizioni ottimali** di esercizio di una macchina

$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} \quad C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

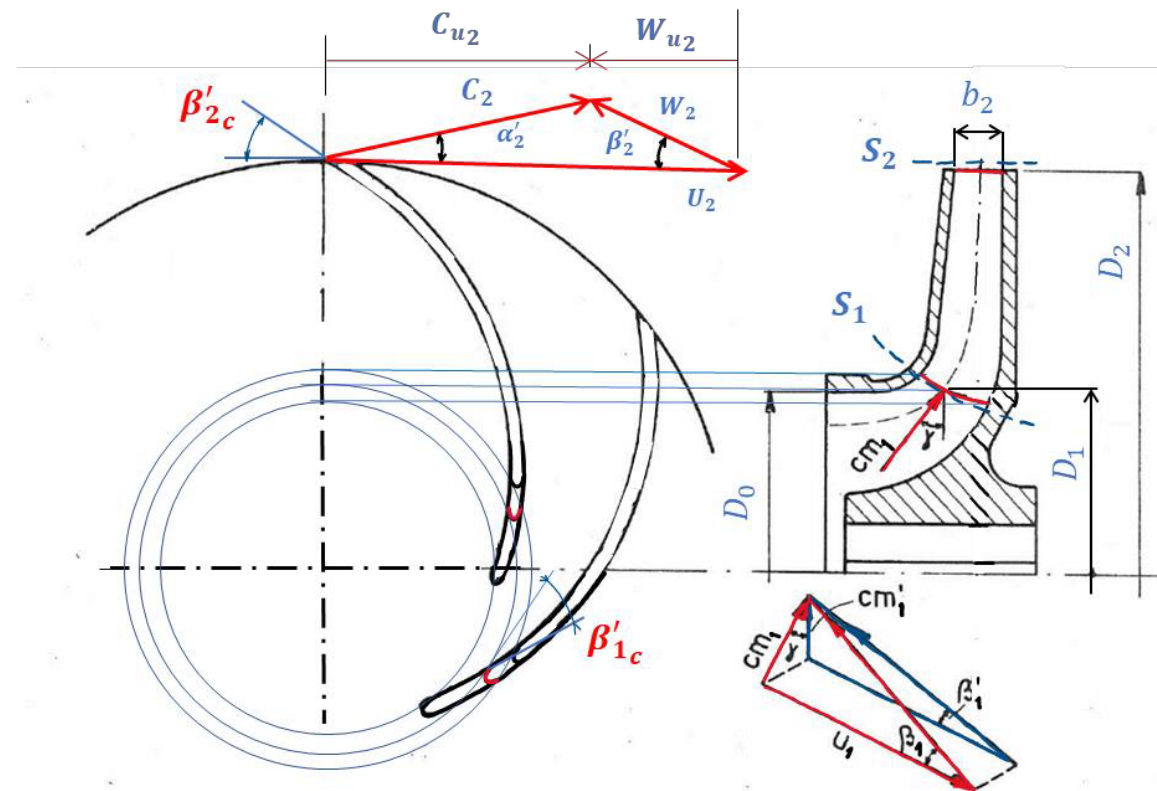
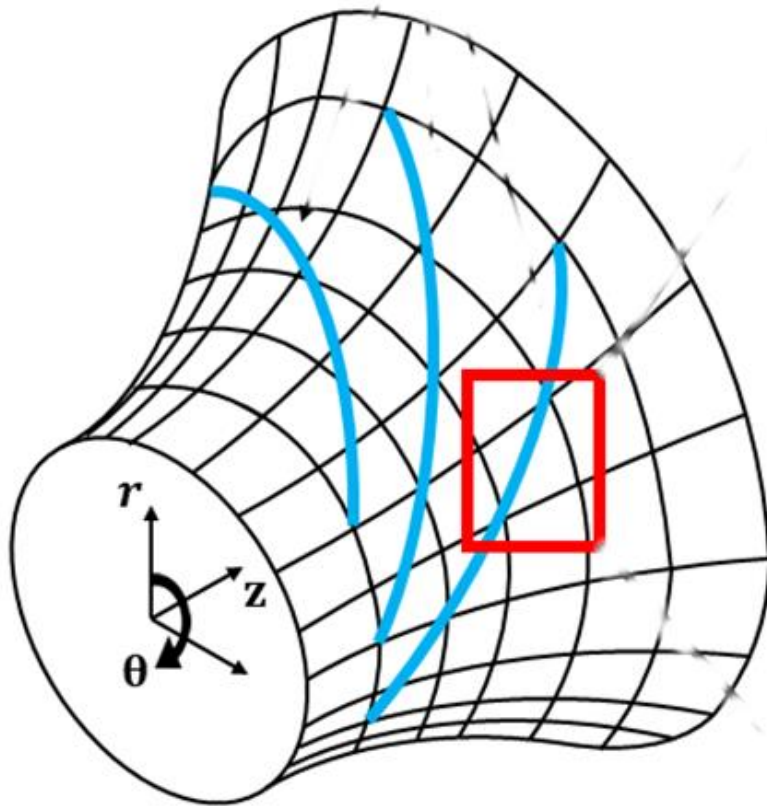
Occorrono però alcune **attenzioni**, legate primariamente alle convenzioni adottate per la **rappresentazione grafica** della girante.



I **triangoli delle velocità** vengono valutati con riferimento alla **linea di flusso** e quindi su piani che possono essere inclinati rispetto ai piani di proiezione riportati nei disegni

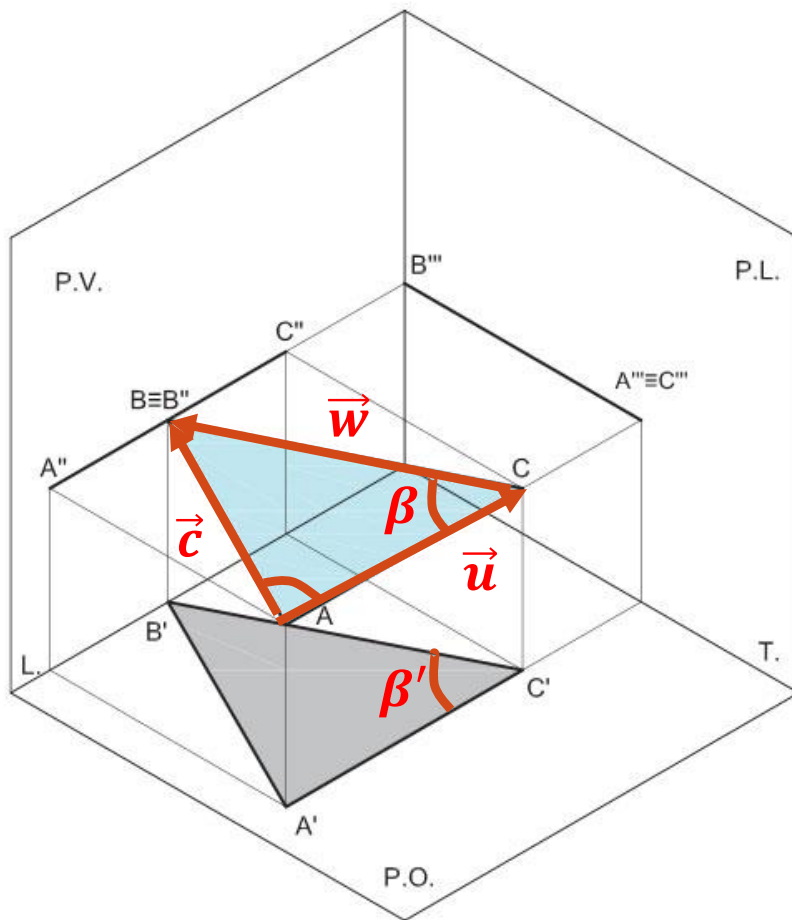


Superfici di flusso vs. piani di sezione



Proiezioni ortogonali di figure piane

- Se la proiezione ortogonale riguarda una figura su **un piano parallelo** al piano di proiezione, la figura proiettata è uguale alla figura piana non proiettata

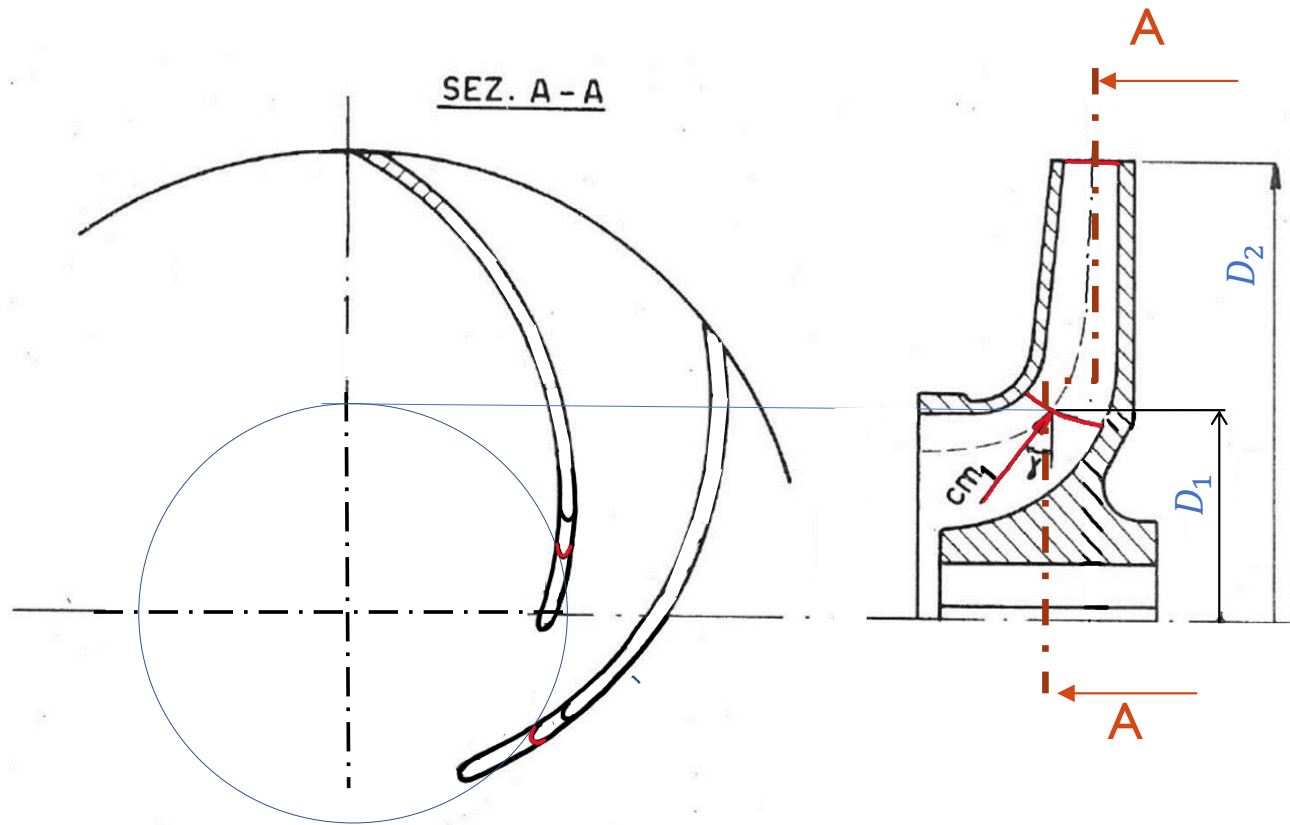


- In questo caso, il triangolo delle velocità mantiene **inalterate le sue caratteristiche geometriche** (lati e angoli)

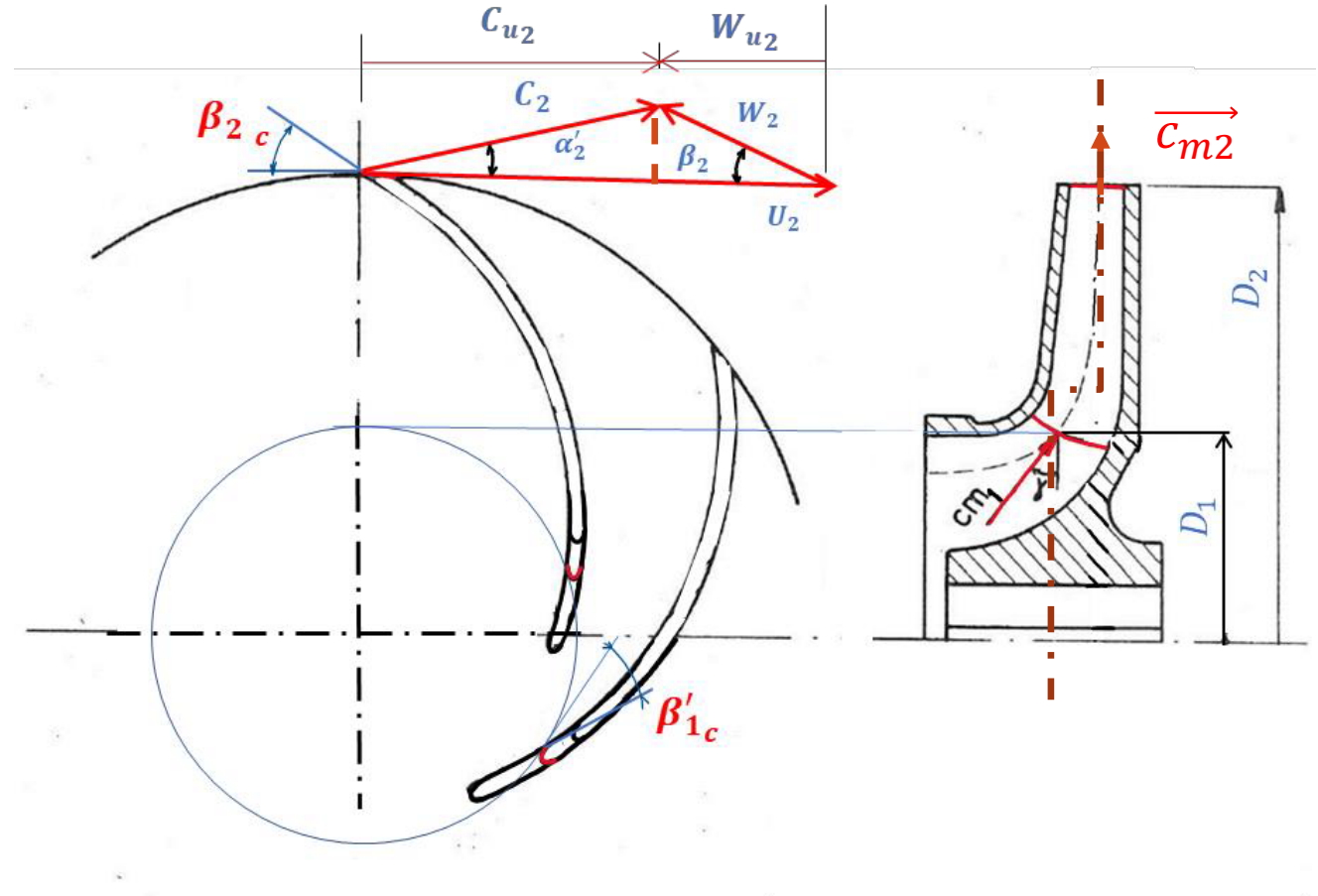
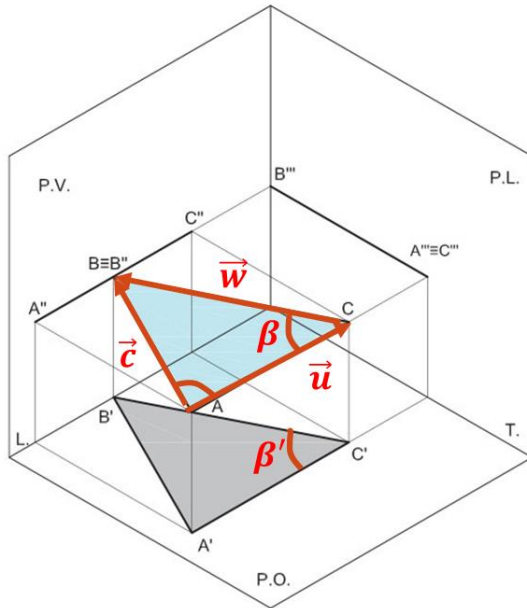
$$\beta = \beta'$$

Proiezioni ortogonali di figure piane

- Questo accade sulla sezione di uscita della girante



Proiezioni ortogonali di figure piane



...in cui il piano del triangolo e quello di proiezione sono coincidenti.

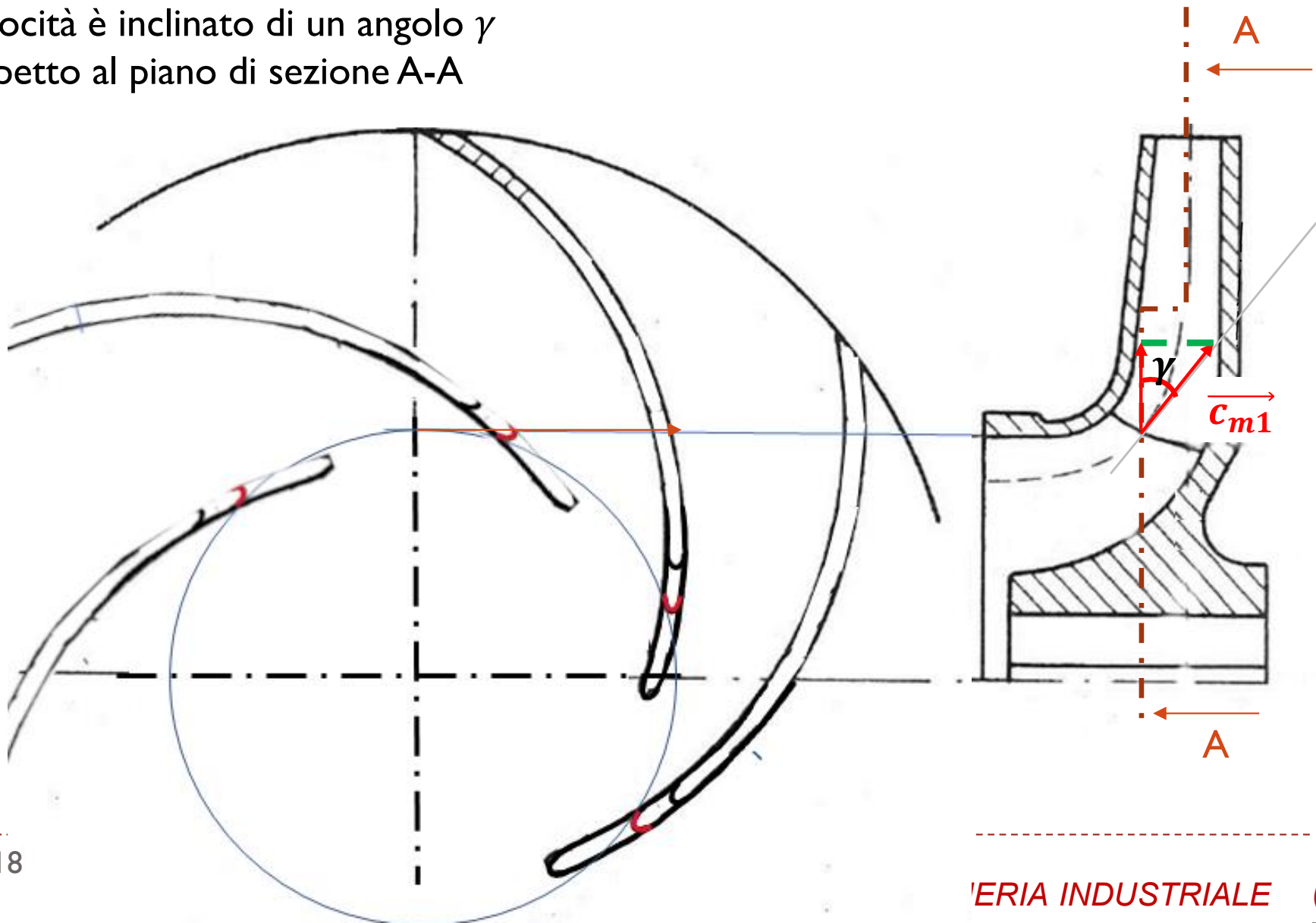
- In particolare, si modificano **gli angoli di flusso** rispetto ai quali vado a rappresentare la **geometria della pala** nel piano di proiezione

$$\beta \neq \beta'$$



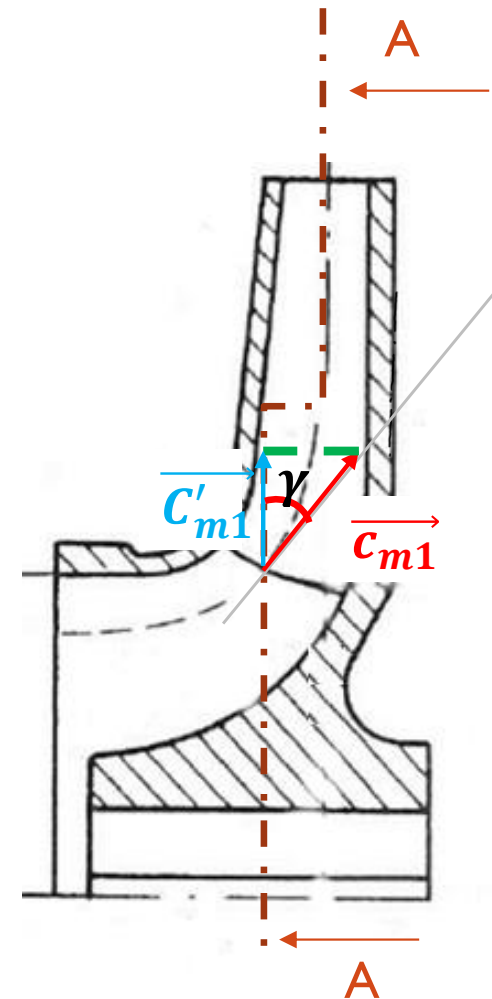
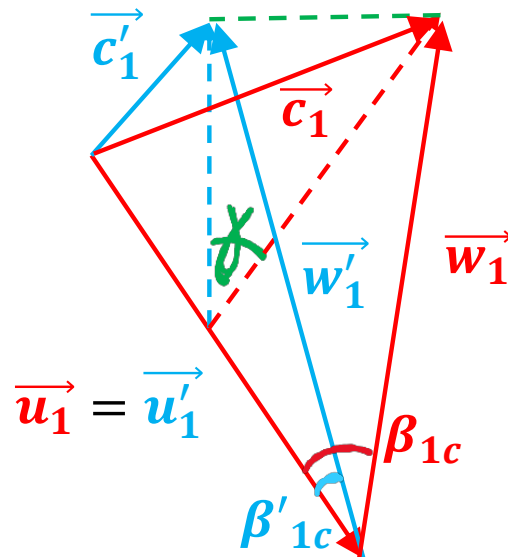
Proiezioni ortogonali di figure piane

- All'ingresso, il piano del triangolo di velocità è inclinato di un angolo γ rispetto al piano di sezione A-A



Proiezioni ortogonali di figure piane

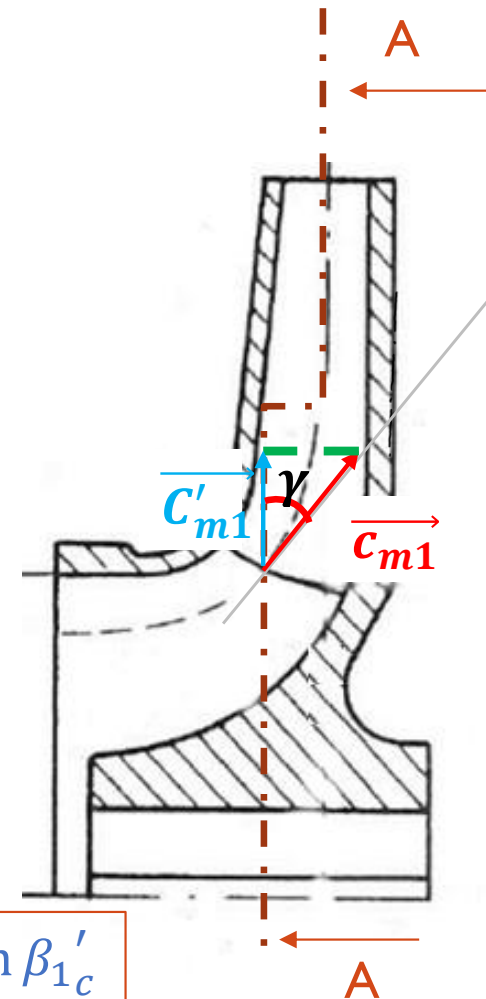
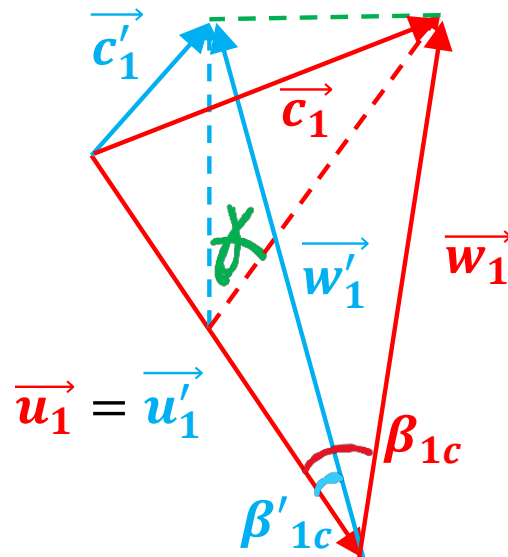
- All'ingresso, il piano del triangolo di velocità è inclinato di un angolo γ rispetto al piano di sezione A-A



Proiezioni ortogonali di figure piane

- Tra l'angolo β_{1c} della pala sulla superficie di corrente e l'angolo β'_{1c} proiettato invece sulla vista circonferenziale sussiste il seguente legame:

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{W_{u1}}} \quad \tan \beta'_{1c} = \frac{\overrightarrow{C'_{m1}}}{\overrightarrow{W_{u1}}}$$

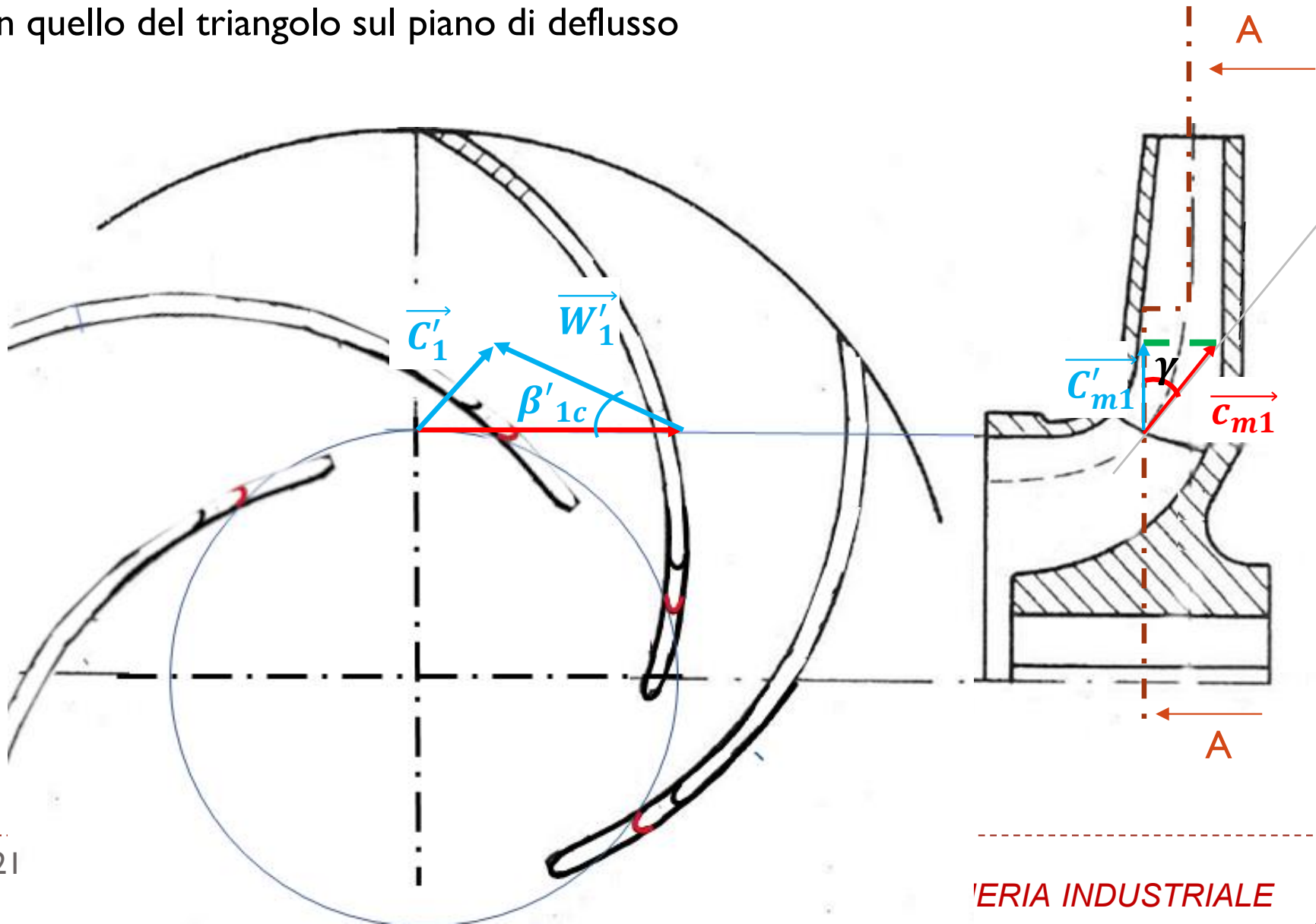


$$\frac{\tan \beta_{1c}}{\tan \beta'_{1c}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{W_{u1}}} \frac{\overrightarrow{W_{u1}}}{\overrightarrow{C'_{m1}}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{C'_{m1}}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{C_{m1}} \cos \gamma}$$

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\tan \beta'_{1c}}{\cos \gamma}$$

Proiezioni ortogonali di figure piane

- Nel piano circonfrenziale è quindi quotato l'angolo costruttivo β'_{1c} e non quello del triangolo sul piano di deflusso



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

PROF. ING. ALBERTO BENATO, PH.D.

ASSOCIATE PROFESSOR

TURBOMACHINERY & ENERGY SYSTEMS GROUP

DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING - UNIVERSITY OF PADOVA
VIA VENEZIA 1 - 35131 - PADOVA
BLDG. EX DIM - 5TH FLOOR - ROOM 19

TEL. 049 827 6752

MAIL: ALBERTO.BENATO@UNIPD.IT

WEBSITE: RESEARCH.DII.UNIPD.IT/TES/

