

Lezione 23

Esercizio 1.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

($\lim_{x \rightarrow 0}$ intermedio $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^-}$).

Oss Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$, allora questo limite si calcola facilmente con il binomio di Newton: esercizio.

Per la soluzione generale:

Porro

$$y = (1+x)^\alpha - 1.$$

Nota che se $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Abbiamo allora la seguente uguaglianza:

$$\boxed{1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(1+x)^\alpha - 1)}{(1+x)^\alpha - 1} =$$

Esercizio finale
lezione 22

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x)^\alpha)}{(1+x)^\alpha - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1} =$$

per $\alpha \neq 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1} \cdot \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{(1+x)^\alpha - 1}}_{\text{per } \alpha \neq 0}$$

Ricorda che il problema da studiare è:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^\alpha - 1}$$

D'altro parte, ricordo di dare come
punto: dunque, ho ottenuto

$$1 = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\alpha \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+n)}{n}}_{\lim 1} \frac{n}{(1+n)^\alpha - 1} \right)$$

Segue:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(\alpha \cdot \frac{n}{(1+n)^\alpha - 1} \right) = 1$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1+n)^\alpha - 1}{n} = \alpha.$$

Oss Il calcolo precedente funziona
in $\alpha \neq 0$. Ma per $\alpha = 0$,

$$\frac{(1+n)^\alpha - 1}{n} = 0 \text{ per ogni } n, \text{ dunque}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1+n)^{\alpha} - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} 0 = 0 = \alpha.$$

Quindi la formula è vera anche per $\alpha = 0$!

Proprietà delle funzioni continue

Notazione (intervalli) $a \leq b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{intervallo chiuso in } a \text{ e in } b$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{intervallo aperto in } a \text{ e } b$$

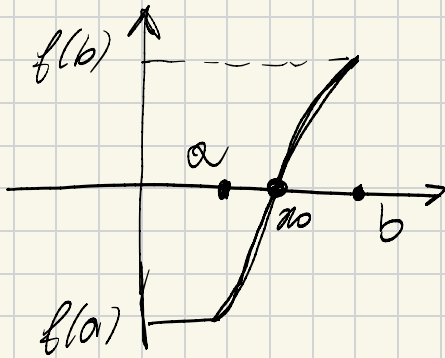
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{intervallo chiuso in } a \text{ e aperto in } b$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{intervallo aperto in } a \text{ e chiuso in } b$$

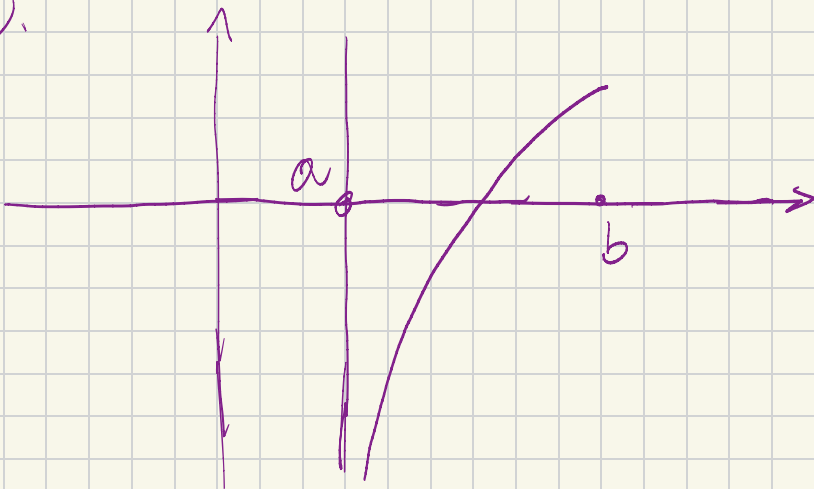
Teorema degli zeri

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ oppure viceversa, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, allora

esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che
 $f(x_0) = 0$.



Q3 Suppongo che f abbia un
asintoto verticale ad esempio in a
(stesse considerazioni se l'asintoto è
in b).



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad f(b) > 0$$

(oppure $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, $f(x) < 0$)

Non posso applicare il teorema direttamente perché il dominio di f è $(a, b]$, cioè la funzione non è definita per $x = a$.

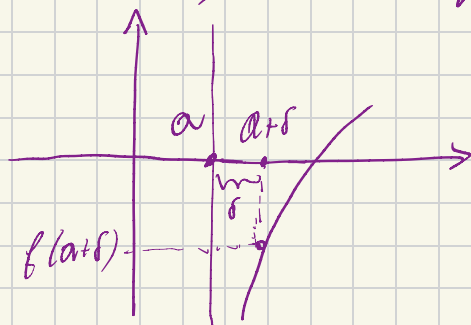
Posso però cavarmela così. Sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

dalla definizione di limite segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(a+\delta) < 0.$$

Cioè: vicino ad a , f è negativa



(impetto: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ significa:

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $f(a+\delta) < -M$

basta che nelop M qualunque, e.g. $M = -1$, e ho fatto).

Allora, ho che

$$f(a+\delta) < 0$$

$$f(b) > 0$$

$$f: [a+\delta, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

duque, esiste $x_0 \in [a+\delta, b]$ t.c.

$$f(x_0) = 0.$$

Quindi, esiste in particolare almeno
in $x_0 \in (a, b)$

talché $f(x_0) = 0$ $[a+\delta, b) \subseteq (a, b)$.

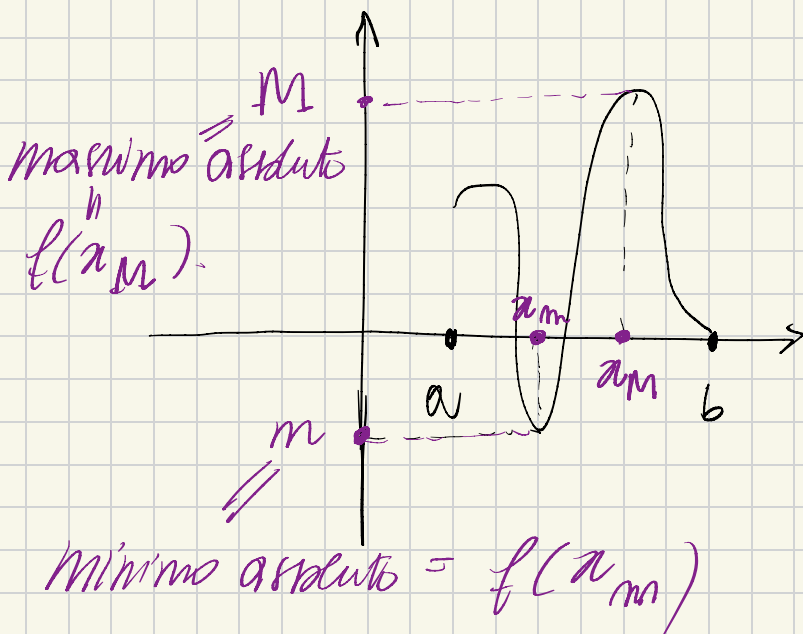
Teorema di Weierstrass

ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f ammette massimo e minimo assoluti, cioè: esistono m e M in $[a, b]$ ($x_m \in [a, b], x_M \in [a, b]$)
 tali che

$$f(x_m) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x_M) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$



Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Domínio: $\mathbb{R}$.

Segno $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.

Simmetrie: Funzione pari; $f(x) = f(-x)$

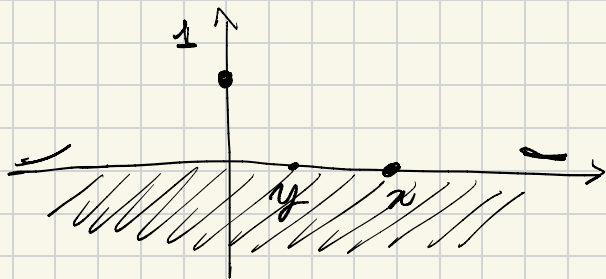
Asintoti verticali: Non ce ne sono, perché il dominio è $\mathbb{R}$.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0^+$$

Intersezione con gli assi

Per $x = 0$, $f(x) = 1$.



Notiamo che a $x > y > 0$, allora

$$f(x) < f(y)$$

inoltre:

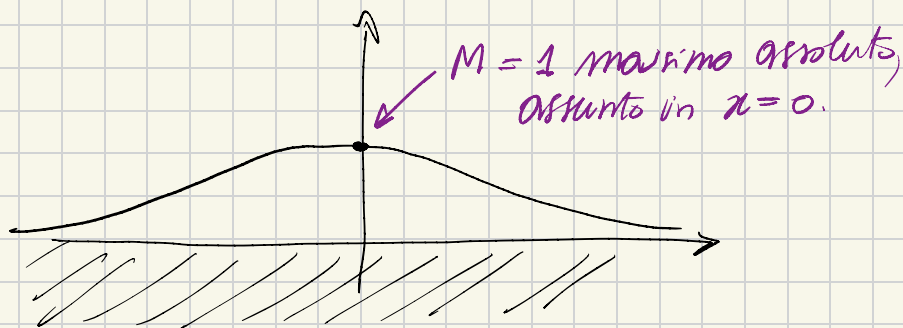
$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2} \Leftrightarrow 1+x^2 > 1+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 > y^2$$

$$\Leftrightarrow x > y \text{ per } x > 0, y > 0.$$

Ciò la funzione $f(x)$ è decrecente

Quindi: f è decrecente per $x \geq 0$,
ed è simmetrica rispetto all'asse
della y . Dunque $x=0$ è in
massimo assoluto.



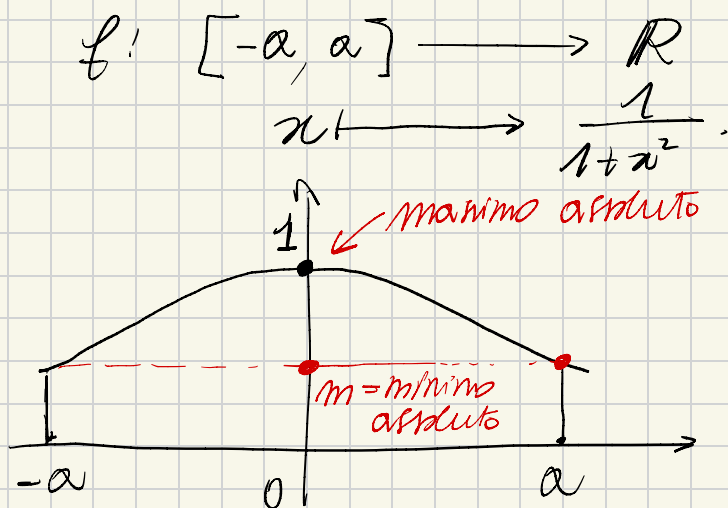
D'altra parte, $f(x)$ non ha minimo
però ha un inf, cioè

$$\inf \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = 0$$

Ciò: 0 è inf del codominio, ma non

è in minimo perché $\nexists x$ t.c. $f(x) = 0$
ma $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f(x) < \varepsilon$.

Restringo ora la funzione nel dominio
 $[-a, a], a > 0, a \in \mathbb{R}$.



In questo cas, il teorema di Weierstrass
si può applicare, e ci dà che f
ammette massimo e minimo assoluti in
 $[-a, a]$, che potranno anche calcolarsi
massimo $= 1 = f(0)$.
minimo $= f(a) = f(-a)$.

Teorema di valori intermedi

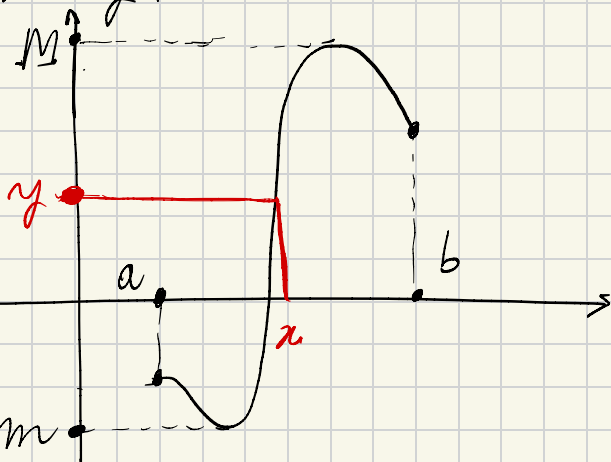
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua. La funzione f assume tutti i valori intermedi compresi tra il minimo e il massimo della funzione, la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass.

Detto in formule: se $M = \text{massimo di } f$
 $m = \text{minimo di } f$

(come nel teorema di Weierstrass), allora

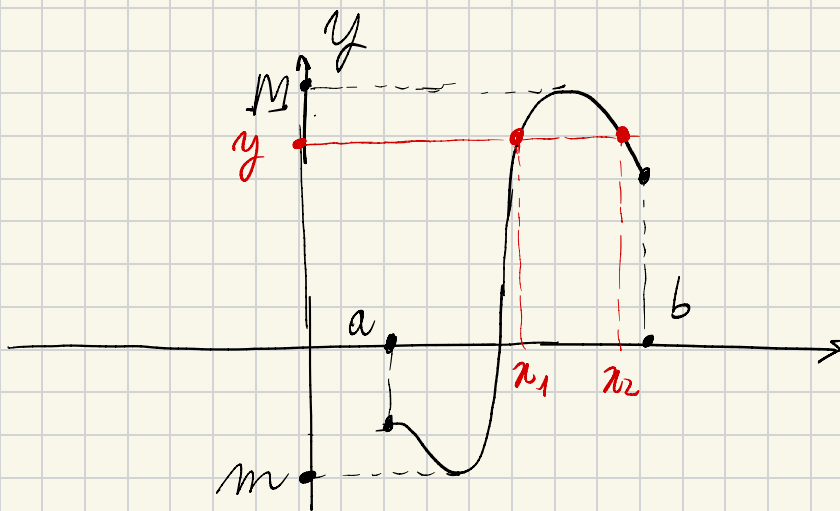
$\forall y \in [m, M]$, esiste $x \in [a, b]$
tale che

$$f(x) = y.$$



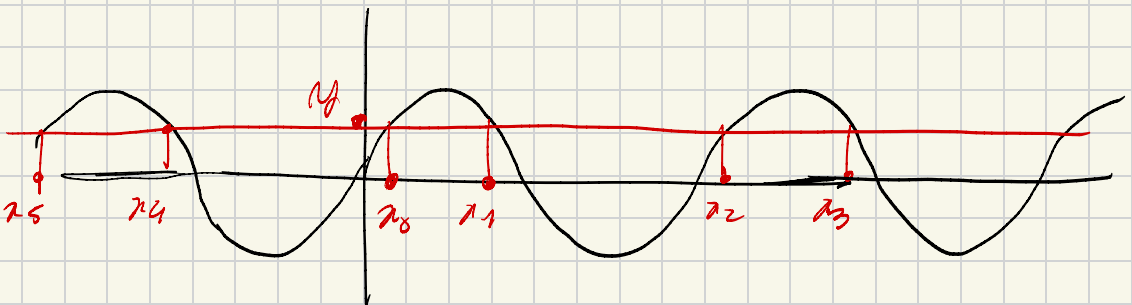
tra m e M

↓
Dato y , trovo x con $f(x) = y$



Notare che esistono in questo caso due
valori x_1, x_2 t.c. $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$.

Esempio $\sin(x)$: $m = -1$, $M = 1$



ho infiniti x t.c. $f(x) = y$, per ogni
 $y \in [m, M] = [-1, 1]$.

On Teorema degli zeri per' essere usato

Come in caso particolare del teorema
dei valori intermedi:

Esempi: Polinomi, e^x , $\ln(x)$, $\sin(x)$,
 $\cos(x)$, $\tan(x)$ etc.

(continue dove definite).

Somme, prodotti, quozienti, composizioni
di funzioni continue sono tutte continue
(dove sono definite!).

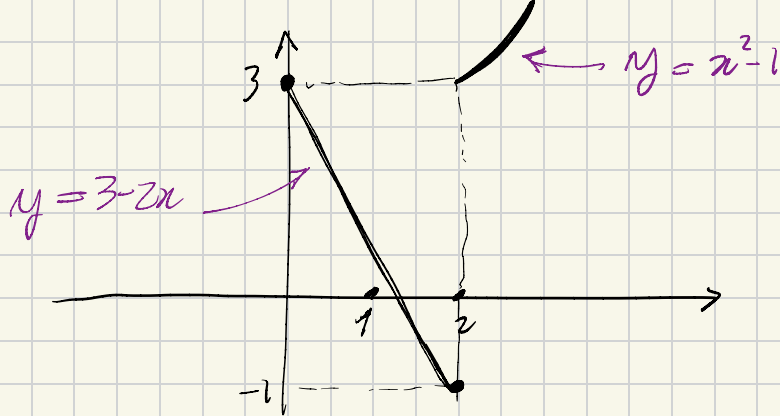
Esempio (•) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
è continua per $x \neq 2$.

(•)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ 3 - 2x, & x < 2. \end{cases}$$

$f(x)$ continua in ogni x , il più
eventualmente $x=2$.

Grafico?



quindi questa funzione non è continua in $x=2$, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

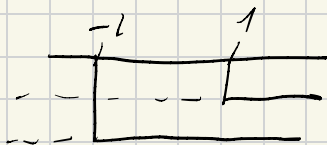
Esempio $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$.

Domanda: $\frac{1}{x^2-1} > 0$ (esistenza del logaritmo)

$x^2-1 \neq 0$ (esistenza della frazione)



$$x^2-1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0$$



$$D: x < -1, x > 1.$$

Immagine: f è pari: $f(x) = f(-x)$.
 perché $x^2 = (-x)^2$.

Basta studiare solo per $x > 1$.

Intervallum on $\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0$

$$\frac{1}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2-1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Segno: $\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} > 1$

$$\frac{1}{x^2-1} > \frac{x^2-1}{x^2-1} \quad (x^2-1 > 0)$$

$$1 > x^2-1$$

$$x^2-1 < 1 \Rightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Nel dominio, ho che

$$f(x) > 0 \text{ per } -\sqrt{2} < x < -1, \quad 1 < x < \sqrt{2}.$$

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = +\infty$$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$$

