

Lezione 11

giovedì 6 novembre 2025

14:30

Proprietà del determinante.

$$(1) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m$$

$$(2) \det A^T = \det A$$

$$(3) \det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) \quad (\text{Teorema di Binet})$$

(4) Scambio di righe:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se scambio 2 righe (o 2 colonne) il determinante cambia di segno.

(5) Moltiplicare una riga per λ . (vale anche per le colonne)

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) \\ = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(6) Sommare a una riga un multiplo di un'altra riga (vale anche per le colonne)

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{pmatrix} = a(d + \lambda b) - b(c + \lambda a) =$$

$$= ad + \cancel{\lambda ab} - bc - \cancel{\lambda ab} =$$

$$= ad - bc$$

il determinante non
cambia.

Esercizio : calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

scambio la 1^a riga
con la 4^a riga

$$= - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} = -(-3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} =$$

2^a riga - 2 × 1^a riga
3^a riga - 2 × 1^a riga
4^a riga - 2 × 1^a riga

$$= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$$

3^a riga + 2^a riga

scambio la
3^a riga con la

3^a riga + 2^a riga
 4^a riga - 2^a riga

Scambio la
 3^a riga con la
 4^a riga

$$= -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -3 \cdot (-14) = +42$$



4^a riga + 6 × 3^a riga

Altra proprietà del determinante:

Matrice a blocchi del tipo

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det A) \cdot (\det C)$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = (\det A) \cdot (\det C)$$

Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)}_{\text{calcolo}} \quad \underbrace{3 \cdot (-2) - 2 \cdot 7}_{\text{calcolo}}$

↑
calcolare con
l'eliminazione di Gauss