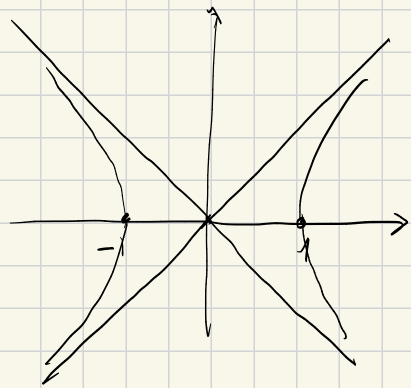
Lezione 22

Ricordo:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Uso ora lo sviluppo in serie di e^x per per avere un'equazione per queste funzioni

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Dunque:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

In particolare, notiamo che $\cosh(x)$ è una funzione pari, perché $x \mapsto x^{2n}$ è pari per ogni $n \geq 0$ intero.
Invece $\operatorname{senh}(x)$ è dispari, perché la funzione $x \mapsto x^{2n+1}$ è dispari, per ogni $n \geq 0$, intero.
Notiamo infine che

$$e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x).$$

Questa espressione si ottiene confrontando gli sviluppi di queste funzioni.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Possiamo anche scrivere in modo compatto

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

<u>Esercizio</u>: Mostrare

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x).$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x)}{x}.$$

Forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$

$$\left(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \sinh(x) = 0 \right).$$

Uso che $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

Perciò

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + x^2/3! + x^4/4! + \dots\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 + x^3/3! + x^4/4! + \dots\right)$$

$$= 1.$$

Esercizio Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$.

Asintoti delle funzioni

(•) Asintoto verticale:

Si ha un asintoto verticale quando

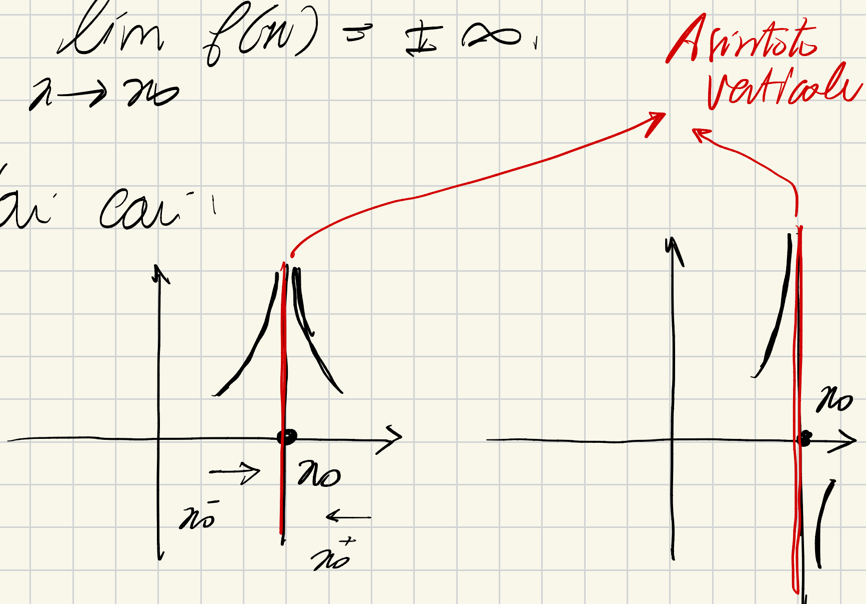
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

che scrivo compattamente come

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

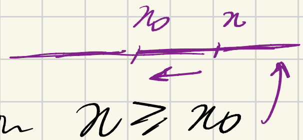
Vari casi:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

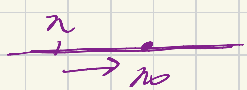
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

dove:

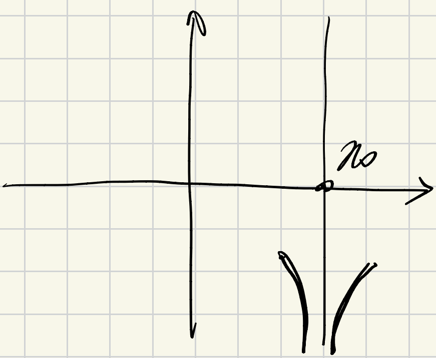


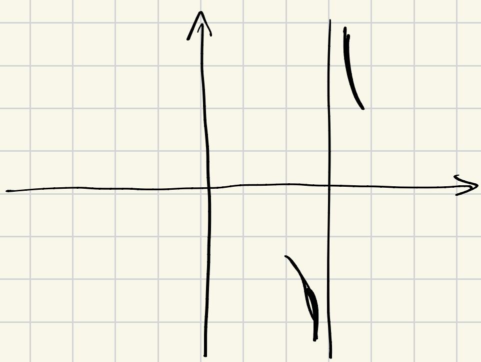
$x \to x_0^+$ significa $x \to x_0$ con $x \geq x_0$

$x \to x_0^-$ significa $x \to x_0$ con $x \leq x_0$.



Ho altri due casi:





$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Oss lo studio del segno di una funzione, cioè $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, è preliminare (o in generale aiuta) lo studio del segno nel lim, cioè

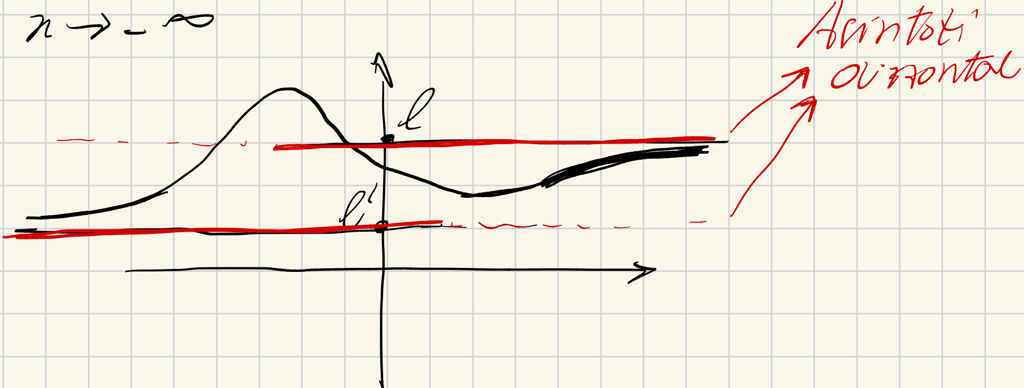
$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty.$$

(•) <u>Asintoti orizzontali</u>

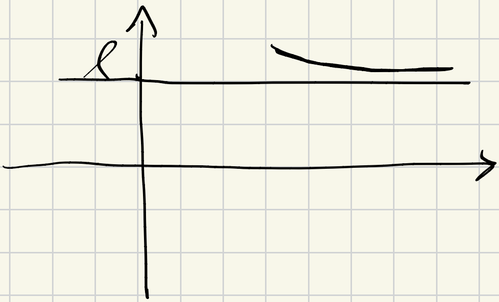
Si ha un asintoto orizzontale quando

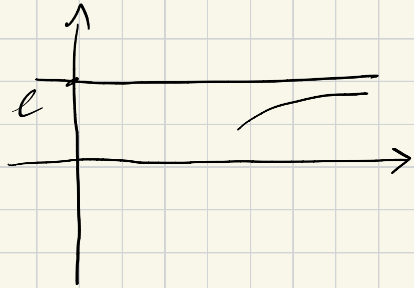
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell' \in \mathbb{R}.$$



<u>Vari casi:</u>





$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l^-$$

Similmente gli altri casi:

(•) <u>Asintoti obliqui</u>

Si ha un asintoto obliquo quando:

(•) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

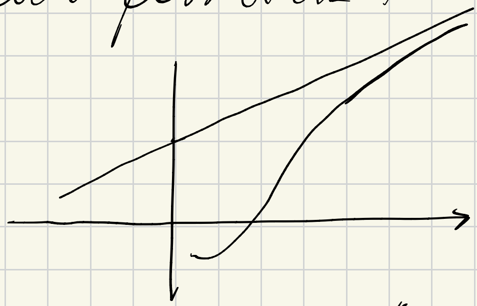
(•) esiste una retta $y = mx + q$ tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) = q$$

già determinato nel calcolo del limite precedente.

Anche nel caso dell'asintoto obliquo ho varie possibilità:



Oss Queste situazioni sono determinate dal segno di $f(x)-mx$ così come le condizioni su alcuni degli altri limite sono determinate dal segno di $f(x)$.

Esempio

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$$

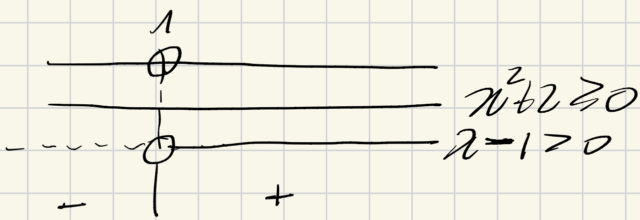
Dominio: $x \neq 1$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff \dfrac{x^2+2}{x-1} \geq 0.$

Regola di segni:

$x^2+2 \geq 0, \ \forall x.$

$x-1 \geq 0, \ x \geq 1.$ (ricordo $x \neq 1$).

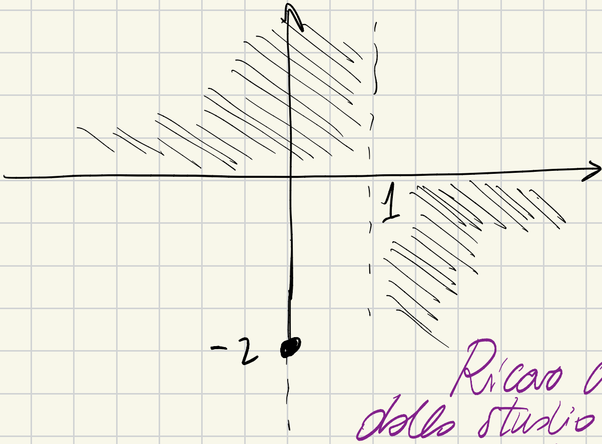


$f(x) \geq 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$, $x < 1$.

Intersezioni con gli assi

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{2}{-1} = -2.$

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{x-1} = 0$, per nessun x.

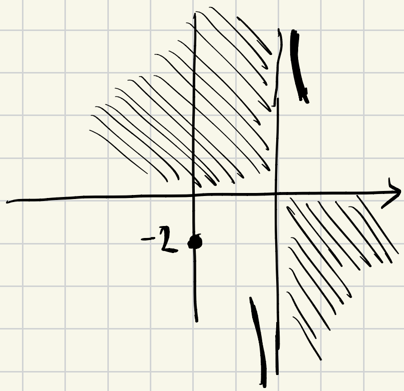


Ricavo che il limite è $+\infty$ dallo studio del segno fatto prima, oppure notando che x^2+2 è $\geq 0 \ \forall x$, mentre $x-1$ è >0 per $x \to 1^+$

Asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty$$



Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1+2/x^2)}{x(1-1/x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \underbrace{\left(\frac{1+2/x^2}{1-1/x}\right)}_{\to 1} = +\infty$$

Allo stesso modo (esercizio)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty.$$

<u>Asintoti obliqui</u>

Cerco m, se esiste.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+2/x^2)}{\cancel{x^2}(1-1/x)} = 1.$$

Allo stesso modo (esercizio)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-1}}{x} = 1.$$

$m=1$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

m esiste, cerco q.

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2-x^2+x}{x-1} \right) =$$

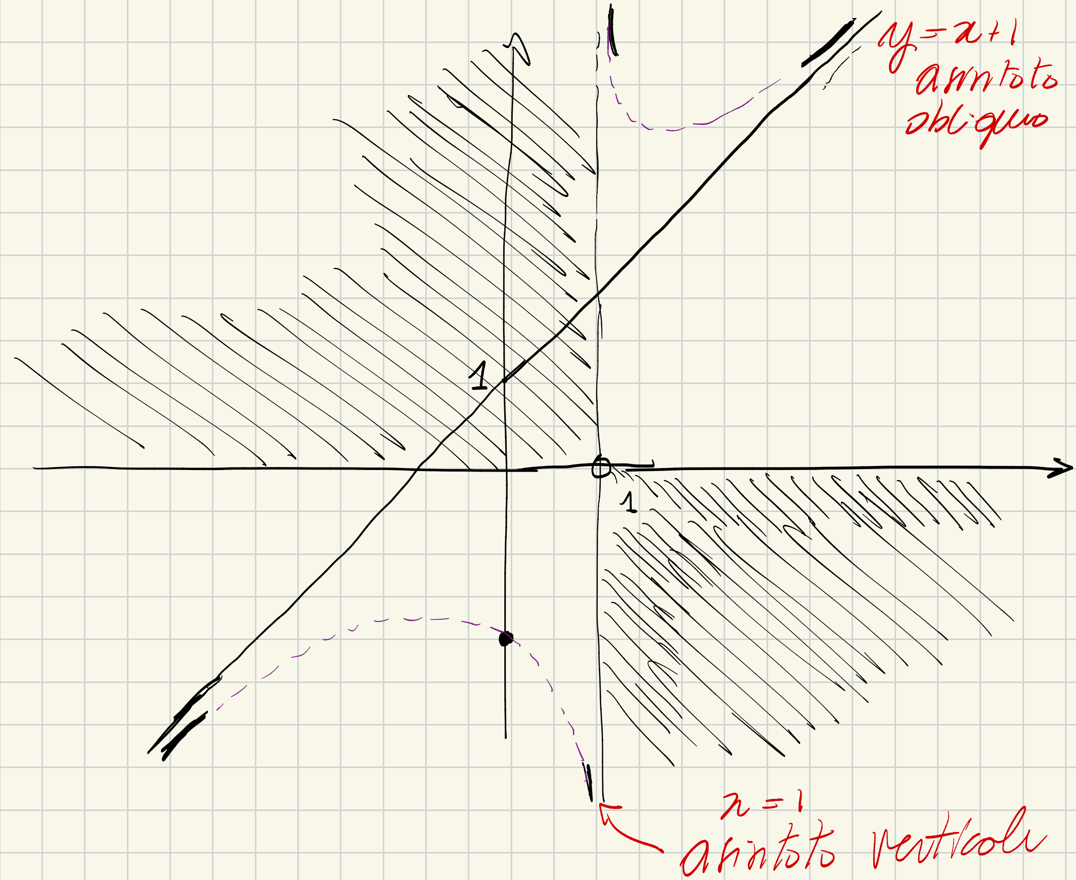
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1+2/x)}{\cancel{x}(1-1/x)} = 1.$$

Stessi calcoli (esercizio) per $x \to -\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right) = 1.$$

Perciò ho un asintoto obliquo comune a $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e vale

$$y = x+1.$$



Oss Studio il segno di $f(x) - (x+1)$.

$$\frac{x^2+2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2+2-(x^2-1)}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

Il segno di $f(x) - (x+1)$ è così:

$$\frac{3}{x-1} > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

$$\frac{3}{x-1} < 0 \quad \text{per} \quad x < 1.$$

Perciò, per $x > 1$, $f(x) > x+1$

per $x < 1$, $f(x) < x+1$.

Posso anche giungere alla stessa conclusione mostrando che l'equazione

$$\frac{x^2+2}{x-1} = x+1$$

non ha soluzioni.

Continuità delle funzioni

Ricordo: $f: D \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D$.
se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l \in \mathbb{R}$$

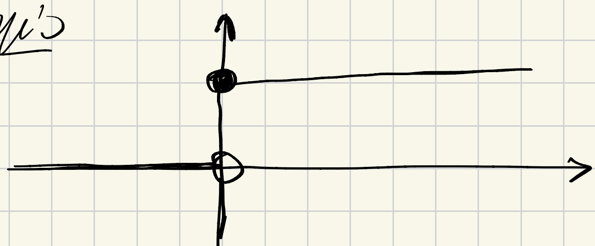
Oss Stiamo dicendo che:

$f(x_0)$ esiste, cioè $x_0 \in D$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono,

e sono uguali a $f(x_0)$.

Esempio



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione non è continua; e

Notiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = 1$$

la funzione non è continua in $x_0 = 0$: i limiti esistono, ma sono diversi.

Verifico tramite la definizione uno dei due limiti, ad esempio

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Vuol dire: $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - 0| < \varepsilon, \quad \forall \ |x| < \delta, \ x < 0.$$

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \forall \ |x| < \delta, \ x < 0$$

Verificato: $f(x) = 0$ per $x < 0$, quindi $|f(x)| = 0 < \varepsilon$. VERIFICATO!

Verifico anche

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Vuol dire: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - 1| < \varepsilon, \quad \forall \; \begin{array}{l} |x| < \delta \\ x > 0 \end{array}$$

Ma per $x > 0$, $f(x) = 1$, quindi

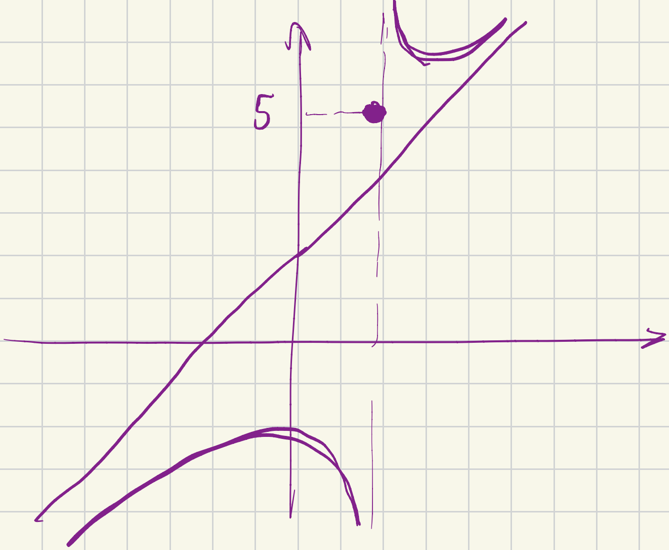
$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

VERIFICATA!

Oss Posso considerare l'esempio precedente

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

f non è definita per $x = 1$. Posso scegliere di definire $f(1) = 5$, ottenendo una funzione definita in $\mathbb{R}$, ma discontinua in 5:



$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

Allora $F(x)$ non è continua in 1 (verifica con la definizione).

Esercizio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{1/y}$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$

Così che

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} y = \pm\infty$$

$$= \lim_{y \to +\infty} y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln(e) = 1.$$

Stesso calcolo x $y \to -\infty$:

$$\lim_{y \to -\infty} y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to -\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^z}\right)$$

$z = -y$

$$= \lim_{z \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{-1}{z}\right)^z}\right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^{-1}}\right) = \ln(e) = 1.$$