Lezione 21

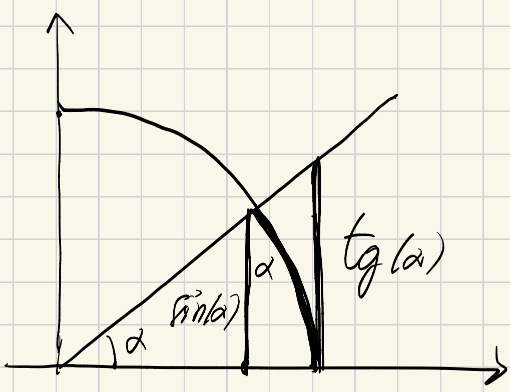
Ricordo

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Forma indeterminata: $\frac{0}{0}$.



$$\sin(\alpha) < \alpha < tg(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Divido per $\sin(\alpha)$ (>0)

$$1 < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(\alpha)} = 1.$$

Quindi ottengo per ogni α

$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

e prendendo il limite e usando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

ottengo

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1.}$$

<u>Oss.</u> Ho utilizzato questo fatto: se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni,

$$c \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \text{ t.c. } |x-x_0|<\delta, \text{ per qualche } \delta \text{ opportuno}$$

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = c$, allora anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

Dimostrazione: esercizio facoltativo.
(usare la definizione di limite).
Versione particolare del <u>teorema del confronto</u>. Se

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$\forall x$ t.c. $|x-x_0|<\delta$, per qualche $\delta>0$,
e se

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione: esercizio facoltativo (oppure nel libro, p. 189).

<u>Oss.</u> Vediamo che anche $\sin(x)$ ha uno sviluppo in serie

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

quindi il limite posso anche calcolarlo algebricamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right) = 1.$$

<u>Esercizio</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)}$$

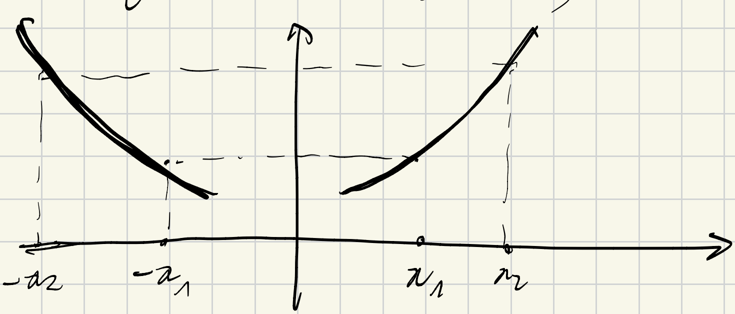
Perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Simmetrie di una funzione

(1) Dico che una funzione è pari se è simmetrica rispetto all'asse y, cioè

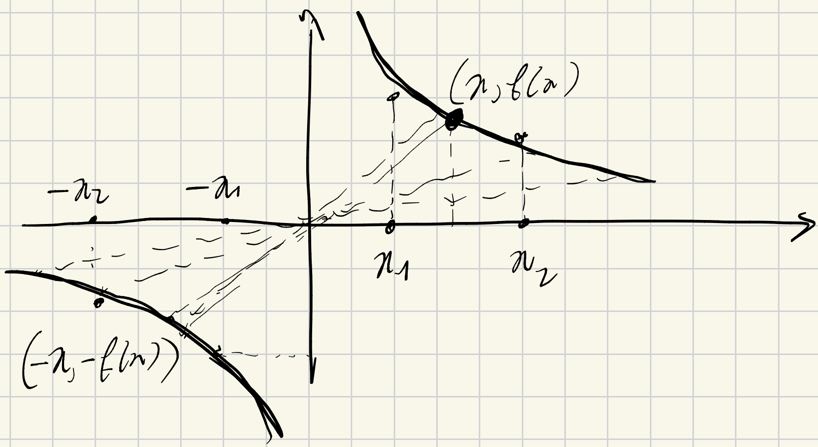
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$



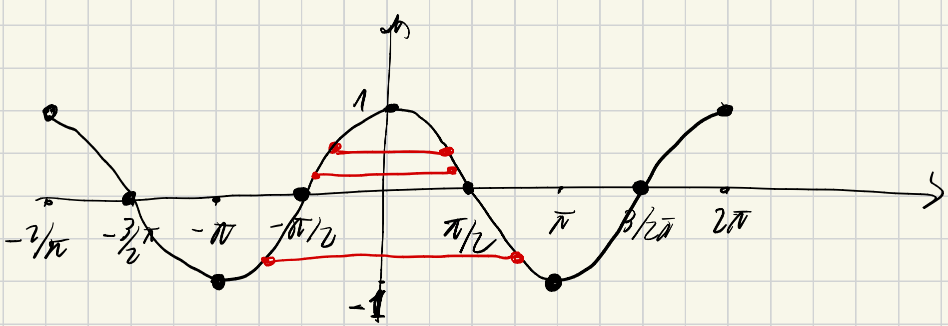
(2) Dico che f è simmetrica rispetto all'origine $(0,0)$ se

$$f(-x) = -f(x).$$

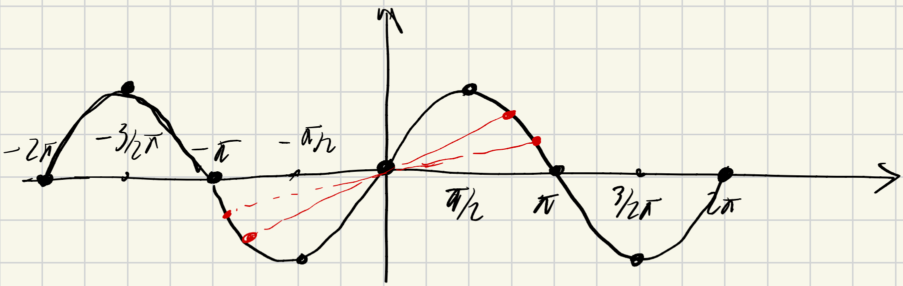
Dico anche in questo caso che la funzione è dispari



Noto che $\cos(x)$ è una funzione pari perché $\cos(x) = \cos(-x)$



Noto che $\sin(x)$ è una funzione dispari perché $\sin(-x) = -\sin(x)$



Funzioni iperboliche

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{coseno iperbolico}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad \text{seno iperbolico.}$$

$$tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Sono chiamati seno e coseno iperbolici perché anziché stare su una circonferenza, come seno e coseno, stanno su un'iperbole.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = 1$$

Quindi il punto $(\cosh(x), \sinh(x))$ appartiene all'iperbole di equazione

$$X^2 - Y^2 = 1$$