



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

Le turbomacchine

Corso di Macchine 1

Agenda

- ▶ La macchina a fluido e i suoi elementi
- ▶ Viste Rappresentative
- ▶ Parametri funzionali
- ▶ Principio di variazione della quantità di moto
 - ▶ La quantità di moto
 - ▶ Conservazione della quantità di moto
 - ▶ La quantità di moto nelle turbomacchine
 - ▶ Variazione della quantità di moto attraverso la girante
 - ▶ Spinta assiale
- ▶ Principio di variazione del momento della quantità di moto
- ▶ Scambio di energia
 - ▶ Rendimento idraulico
 - ▶ Turbomacchine vs. Macchine Volumetriche

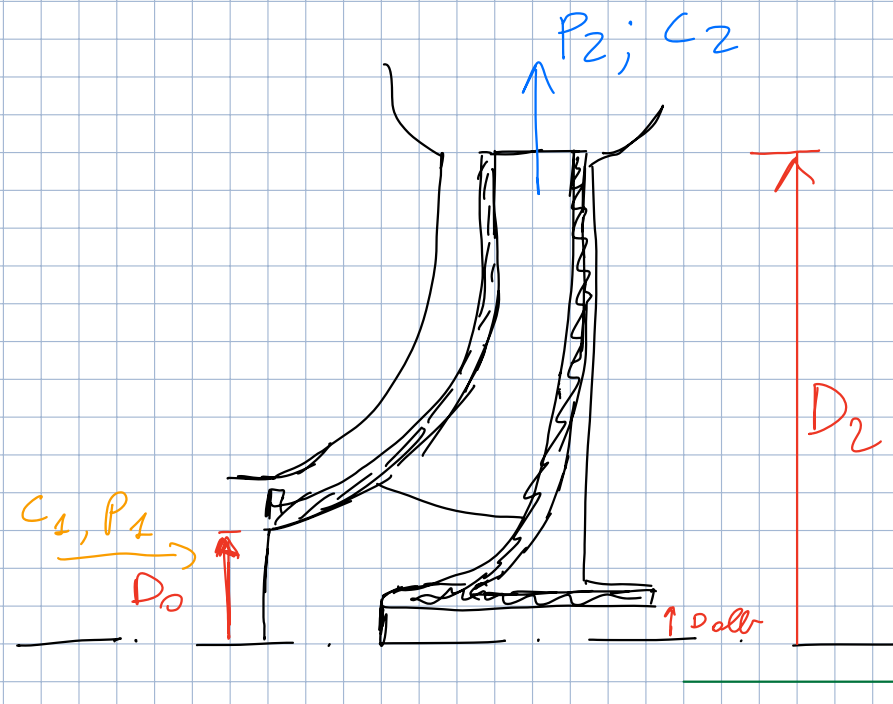




Esercizio

Spinta Assiale

VISTA MERIDIANA



$$Q_v = 0,11 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h = 30 \text{ m}$$

$$\omega = 152 \text{ rad/s}$$

$$P_1 = 0,4 \text{ bar} = 40'000 \text{ Pa}$$

$$P_2 = 2,5 \text{ bar} = 250'000 \text{ Pa}$$

$$D_0 = 180 \text{ mm}$$

$$D_{\text{eller}} = 38 \text{ mm}$$

$$D_2 = 335 \text{ mm}$$

$$b_2 = 36,5 \text{ mm}$$

VALUTARE LA SPINTA ASSIALE ESERCITATA DAL FLUIDO SULLA MACCHINA?

$$\vec{F} = \vec{R} + \int_{A_1} -\vec{n} p \, dA + \int_{A_2} -\vec{n} p \, dA$$

$$\vec{R} = \underbrace{\int_{A_2} \rho \vec{w} \vec{w} \cdot \vec{n} \, dA}_{\text{QUANTITA' DI NOTO USLENTE}} - \underbrace{\int_{A_1} \rho \vec{w} \vec{w} \cdot \vec{n} \, dA}_{\text{QUANTITA' DI NOTO ENTRANTE}} + \underbrace{\left(\int_{A_1} \vec{n} p \, dA + \int_{A_2} \vec{n} p \, dA \right)}_{\text{FORZE ESTERNE AGENTI SULLE SUPERFICI NON SOLIDE}}$$

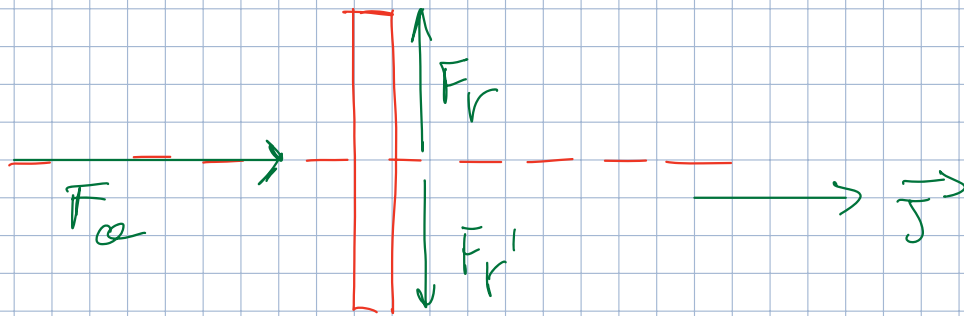
QUANTITA' DI
NOTO USLENTE

QUANTITA' DI
NOTO ENTRANTE

FORZE
ESTERNE

AGENTI SULLE
SUPERFICI NON
SOLIDE

$\int_A \rho \vec{w} \cdot d\vec{in}$



$$R_a = \vec{R} \cdot \vec{J}$$

$$= - \int_{A_2} \vec{C}_2 \rho dQ_v + \int_{A_1} \vec{C}_1 \rho dQ_v + \int_{A_2} \vec{J} \vec{n} p dA - \int_{A_1} \vec{J} \vec{n} p dA$$

$C_2 \perp J$

NO CONCORDE
CON $\vec{J}$

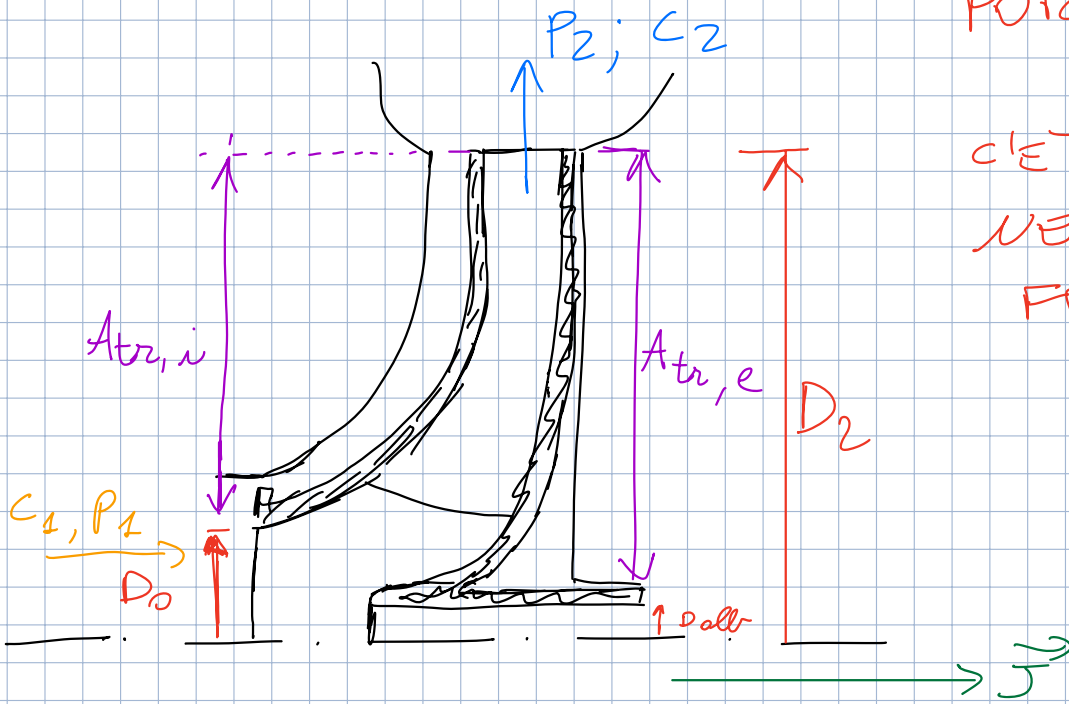
$$= C_1 \cdot \rho \cdot Q_v + p_1 A_1$$

$$C_1 = \frac{Q_v}{A_1} = \frac{Q_v}{\frac{\pi D_0^2}{4}} = \frac{0,11}{\frac{\pi \cdot 0,18^2}{4}} = \frac{0,11}{0,0254} = 4,32 \text{ m/s}$$

$$R_a = 4,32 \cdot 1000 \cdot 0,11 + 40'000 \cdot 0,0254 = 1491,2 \text{ N}$$

LA SPINTA È CONCORDE CON $\vec{J}$ ovvero il
fluido SPINGE LA GIRANTE CONTRO L'ASSE

VISTA MERIDIANA



A CAUSA DELLA PORTA DI FUGA

Q_v, F
 c'è fluido ANCHE
 NELLE AREE
 FRONTALI E
 POSTERIORI
 OVVERO LE
 AREE DEI
 NEATI

$$R_a = C_1 g Q_v + P_1 A_1 + P_2 A_{tr_n} - P_2 A_{tr_e}$$

$$A_{tr,i} = \frac{\pi(D_2^2 - D_0^2)}{4} = \frac{\pi(0,335^2 - 0,180^2)}{4} = 0,0627 \text{ m}^2$$

$$A_{tr,e} = \frac{\pi (D_i^2 - D_{ole}^2)}{4} = \frac{\pi (0,335^2 - 0,038^2)}{4}$$

$$= 0,087 \text{ m}^2$$

$$R_e = 1000 \cdot 0,11 \cdot 4,32 + 40'000 \cdot 0,0254 +$$

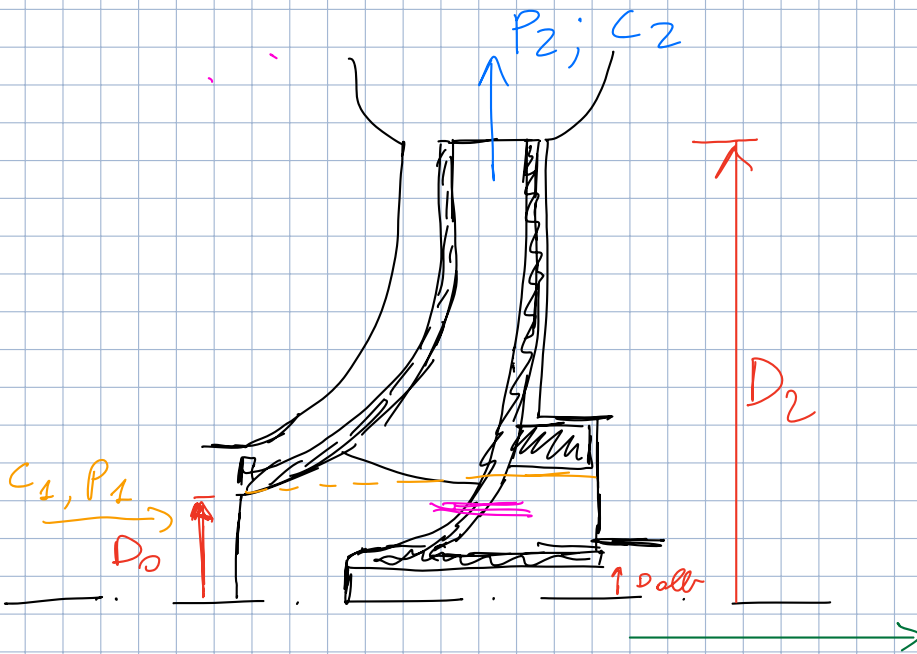
$$+ 250'000 \cdot 0,0627 - 250'000 \cdot 0,087$$

$$= -4583,2 \text{ N} \quad \text{SE CIE IL -}$$

SE C'È IL - SIGNIFICA
CHE LA SPINTA È DA
DX VERSO SX!

SFILA LA GIRANTE!

VISTA MERIDIANA



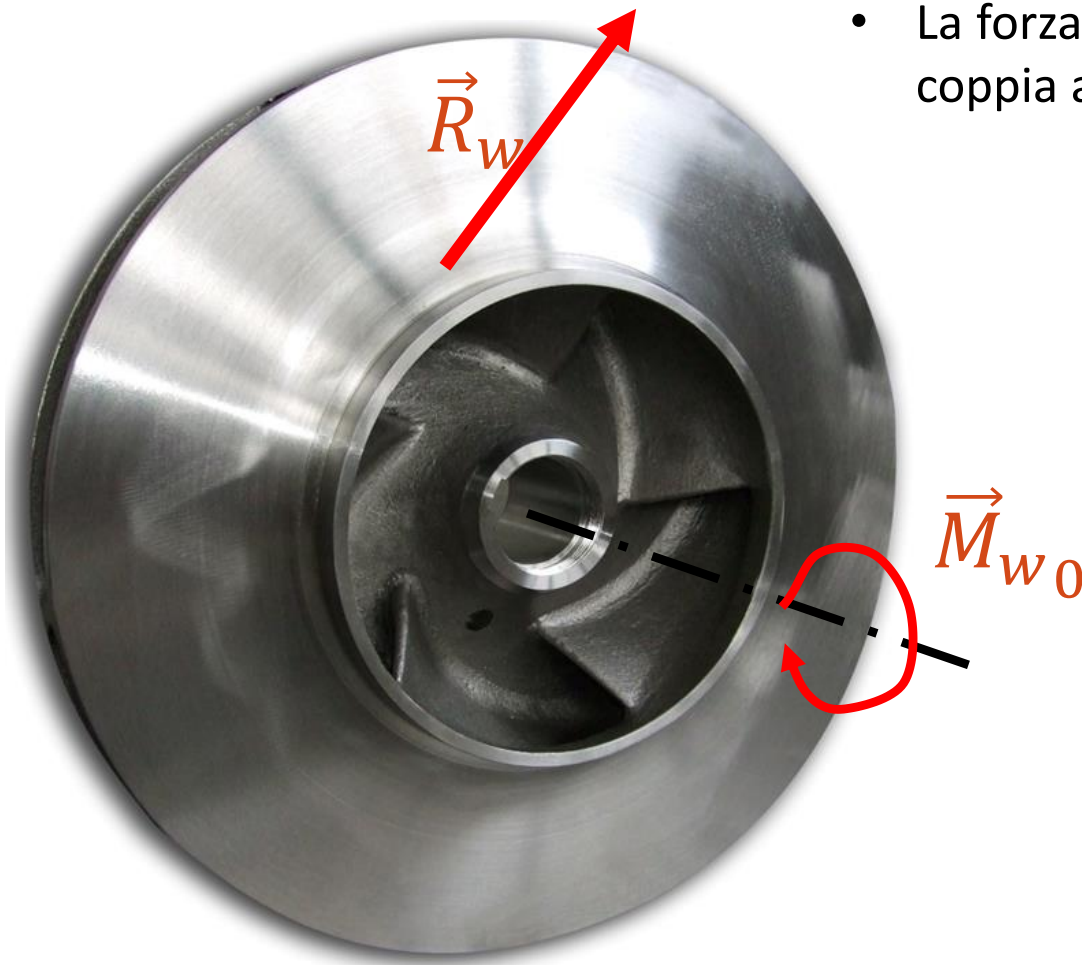
Principio di variazione del momento della quantità di moto

Variazione del momento della quantità di moto

- Il passaggio di una massa fluida attraverso la girante di una macchina idraulica determina l'insorgere di una forza risultante $\vec{R}_w$

- La forza risultante $\vec{R}_w$ determina l'insorgere di una coppia all'albero:

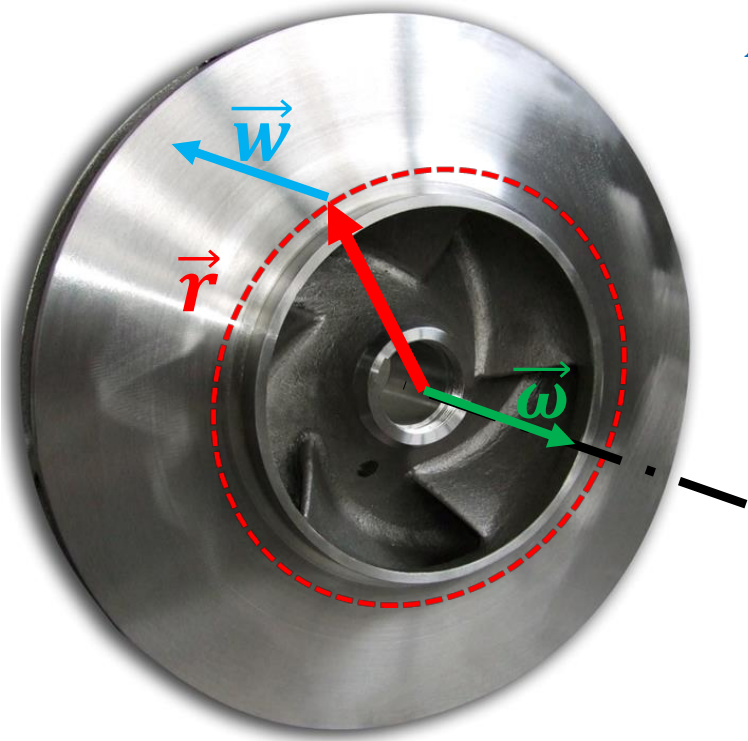
$$\vec{M}_{w0} = \vec{r} \times \vec{R}_w$$



Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{R}_w = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{A_2} \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{n} p dA$$

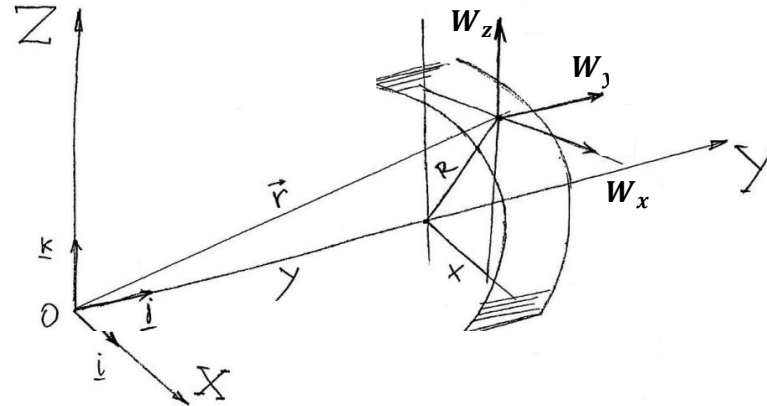
(regime di moto stazionario)



$$\vec{M}_{w0} = \vec{r} \times \vec{R}_w$$

$$\vec{M}_{w0} = \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA + \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{n} p dA$$

Variazione del momento della quantità di moto



$$\vec{M}_{w_0} = \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA + \cancel{\int_{A_2} \vec{r} \times \vec{n} p dA} + \cancel{\int_{A_1} \vec{r} \times \vec{n} p dA}$$

- Nelle applicazioni interessa la componente del momento $\vec{M}_{w_0}$ lungo l'asse passante per O coincidente con l'asse di rotazione della girante:

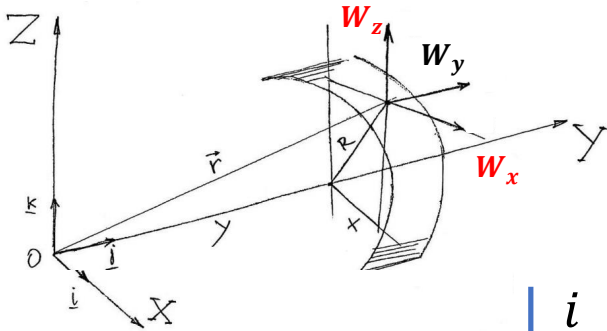
$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j}(\vec{M}_{0w} \cdot \vec{j})$$

- Le superfici A_1 e A_2 sono di **rivoluzione** $\rightarrow$ il versore $\vec{n}$ non ha componente tangenziale

$\Rightarrow$ Sono pertanto **nulli** gli integrali dei momenti dovuti alle forze di pressione agenti sulle superfici A_1 e A_2 .

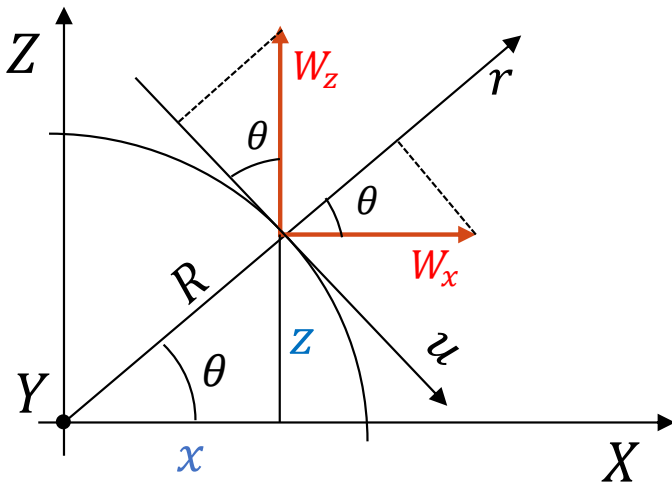
Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j}(\vec{M}_{0w} \cdot \vec{j}) = \vec{j} \left[\int_{A_2} \vec{j} \cdot [\vec{r} \times \vec{W}] \rho W_n dA + - \int_{A_1} \vec{j} \cdot [\vec{r} \times \vec{W}] \rho W_n dA \right]$$



- Indicando con $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ e $\vec{W} \equiv (W_x, W_y, W_z)$ le componenti del raggio vettore $\vec{r}$ e della velocità $\vec{W}$ rispetto al sistema di riferimento cartesiano, si ottiene:

$$\vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \underline{i}(W_z y - W_y z) + \underline{j}(W_x z - W_z x) + \underline{k}(W_y x - W_x y)$$



- Interessa il momento lungo l'asse di rivoluzione Y , pertanto:

$$\vec{M}_y = \vec{j}(W_x z - W_z x)$$

Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{M}_{wa} = \vec{j}(\vec{M}_{0w} \cdot \vec{j}) = \vec{j} \left[\int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA + - \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA \right]$$

$$\vec{M}_y = \vec{j} (W_x z - W_z x)$$

- Passando a coordinate cilindriche, si ottiene:

$$W_r = W_x \cos \theta + W_z \sin \theta$$

$$W_u = W_x \sin \theta - W_z \cos \theta$$

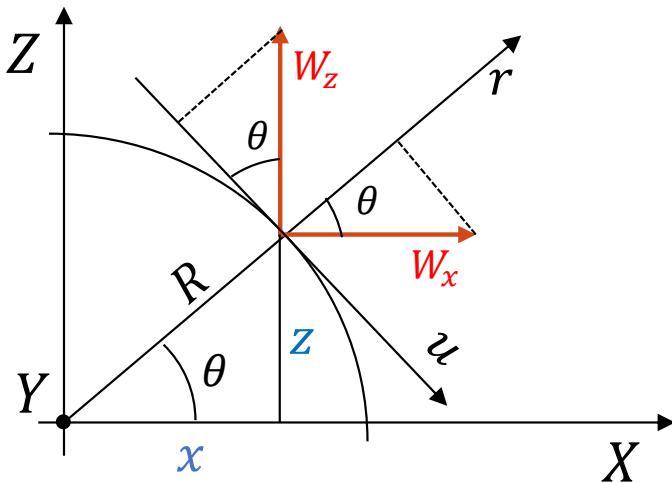
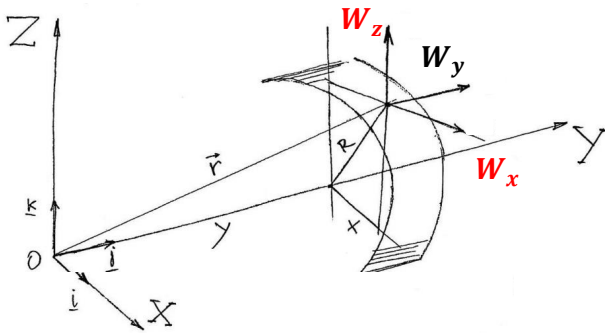
$$\sin \theta = \frac{z}{R} \quad \cos \theta = \frac{x}{R}$$

e quindi:

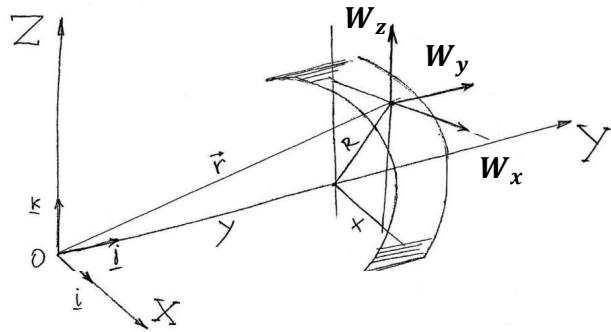
$$\vec{M}_y = \vec{j} R W_u$$



$$\vec{M}_{wa} = \vec{j} \left[\int_{A_2} R W_u \rho W_n dA - \int_{A_1} R W_u \rho W_n dA \right]$$



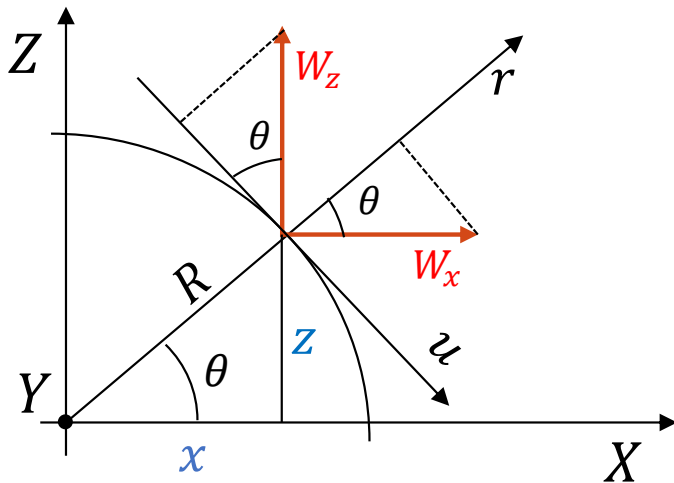
Variazione del momento della quantità di moto



$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} \left[\int_{A_2} R W_u \underbrace{\rho W_n dA}_{dQ_m} - \int_{A_1} R W_u \underbrace{\rho W_n dA}_{dQ_m} \right]$$

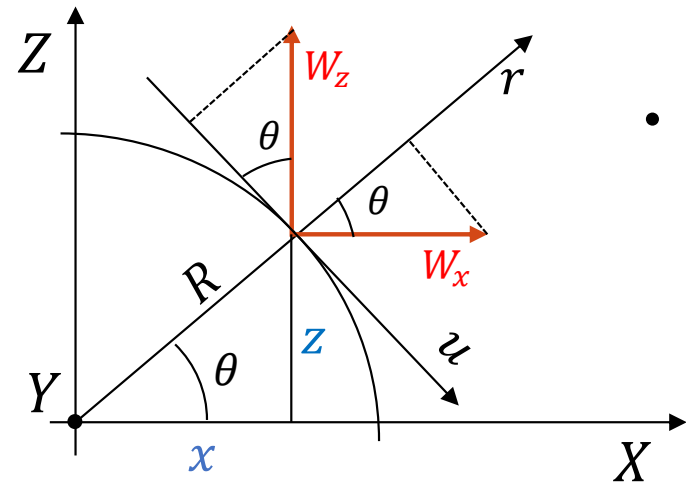
$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

dove $\overline{R W_u}$ è il valor medio di $R W_u$ lungo la sezione di flusso



- Se con Q_m s'intende la portata di massa che attraversa l'intera girante e non un semplice condotto interpalare, $\vec{M}_{w_a}$ dà il momento lungo l'asse agente globalmente sulla girante a seguito della sua interazione con il fluido

Variazione del momento della quantità di moto



$$\vec{M}_{w_a} = \int Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

- Per ottenere il **momento complessivo** fornito dal motore nel sistema di riferimento assoluto, occorre aggiungere al momento $\vec{M}_{w_a}$ del riferimento relativo i momenti dovuti alle forze centripete $\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV$ e alle forze di Coriolis $\rho 2 \vec{\omega} \times \vec{W} dV$

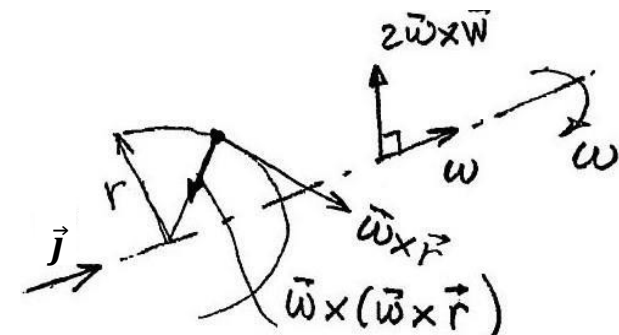
Momento dovuto alle forze centripete

- La componente lungo l'asse delle forze centripete è **nulla**. Infatti:

$$\vec{j} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \equiv 0$$

perché $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ha direzione radiale e dunque:

$$\vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \equiv 0.$$



Variazione del momento della quantità di moto

Momento dovuto alle forze di Coriolis

Il contributo legato alle forze di Coriolis è:

$$\vec{j} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{W}) \rho dV = \vec{j} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{W}_y + \vec{W}_u + \vec{W}_r)] 2\rho dV$$

Si osserva:

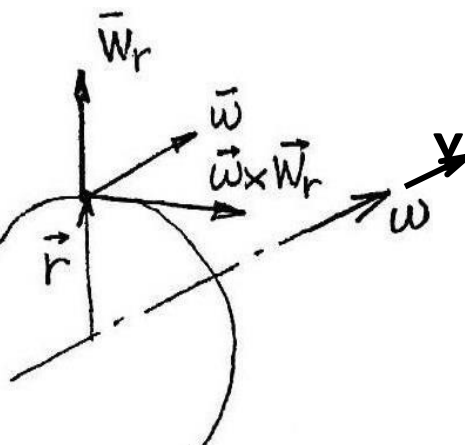
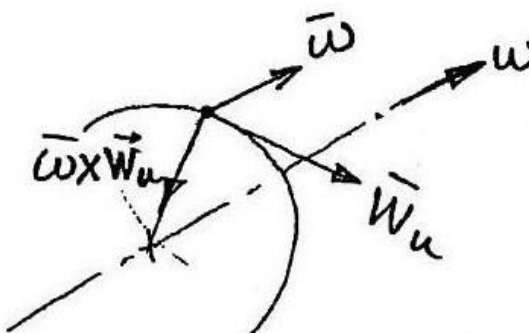
$$\vec{\omega} \parallel \vec{W}_y \Rightarrow |\vec{\omega} \times \vec{W}_y| = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{W}_u \parallel \vec{r} \Rightarrow |\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{W}_u)| = 0$$

Rimane: $\vec{j} \cdot \int_{V_0} 2 \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{W}_r) \rho dV$

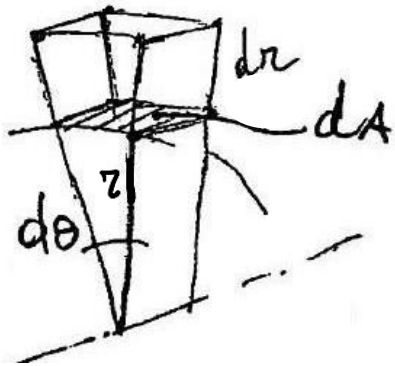
ed è un momento lungo l'asse della girante il cui modulo vale:

$$\int_{V_0} 2 \omega r W_r \rho dV$$



Variazione del momento della quantità di moto

Momento dovuto alle forze di Coriolis



- In coordinate cilindriche $dV = r d\theta dy dr = dA dr$, cosicché:

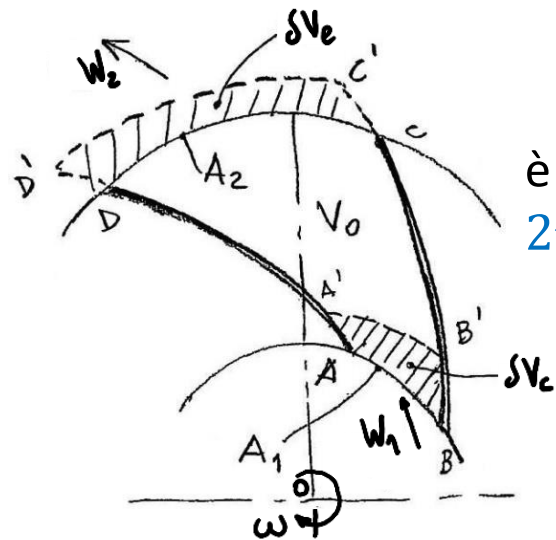
$$\int_{V_0} 2\omega r W_r \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} 2\omega r dr \int_A \rho W_r dA$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi che delimitano il condotto interpolare.

- L'integrale:

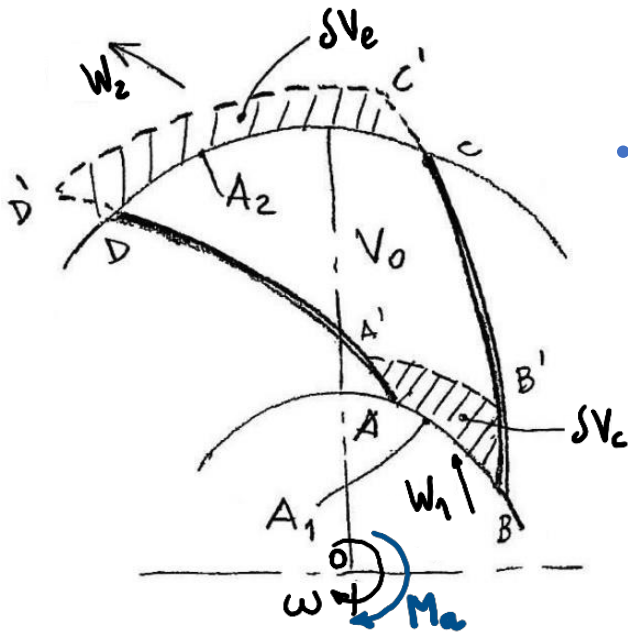
$$\int_A \rho W_r dA = Q_m$$

è la portata di massa Q_m che attraversa il condotto interpolare se $\theta = 2\pi/z$ oppure la portata di massa che attraversa la girante se $\theta = 2\pi$



$$M_{Coriolis} = \int_{V_0} 2\omega r W_r \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} 2\omega r Q_m dr = Q_m \omega (R_2^2 - R_1^2)$$

Variazione del momento della quantità di moto



Momento complessivo

- Riassumendo, al momento dovuto alla variazione del momento della quantità di moto della corrente relativa :

$$M_{w_a} = Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

deve essere aggiunto quello dovuto alle forze di Coriolis

$$M_{Coriolis} = \int_{V_0} 2 \omega r W_r \rho dV = Q_m \omega (R_2^2 - R_1^2)$$

cosicché il **momento complessivo** agente sull'albero risulta pari a:

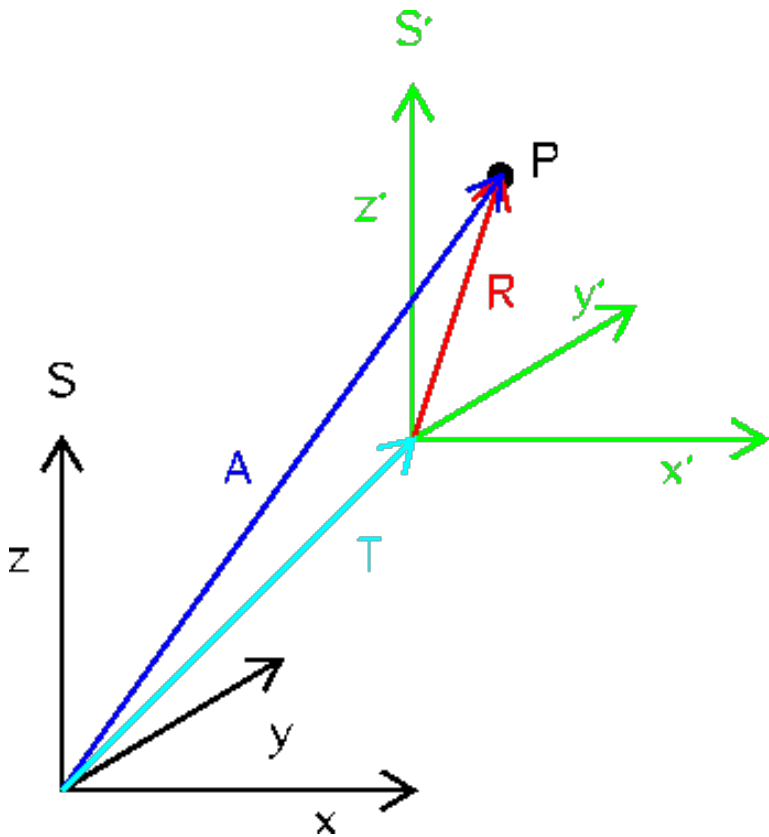
$$M_a = M_{w_a} + M_{Coriolis} = Q_m [(\overline{R_2 W_{u_2}} + \omega R_2^2) - (\overline{R_1 W_{u_1}} + \omega R_1^2)] =$$

$$= Q_m [R_2 (\overline{W_{u_2}} + \omega R_2) - R_1 (\overline{W_{u_1}} + \omega R_1)]$$

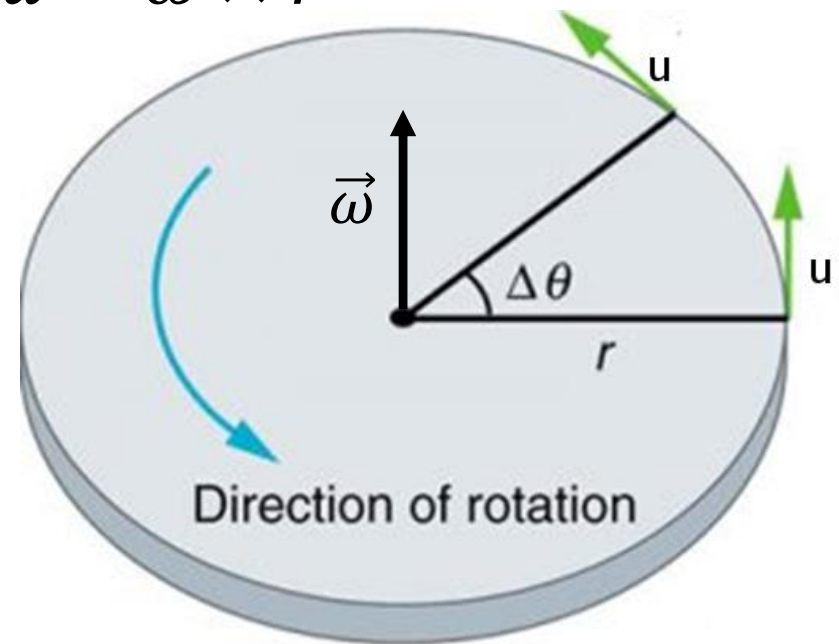
?

Sistemi di riferimento

$$\vec{A} = \vec{T} + \vec{R} \quad \longrightarrow \quad \vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$$



$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

PROF. ING. ALBERTO BENATO, PH.D.

ASSOCIATE PROFESSOR

TURBOMACHINERY & ENERGY SYSTEMS GROUP

DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING - UNIVERSITY OF PADOVA
VIA VENEZIA 1 - 35131 - PADOVA
BLDG. EX DIM - 5TH FLOOR - ROOM 19

TEL. 049 827 6752

MAIL: ALBERTO.BENATO@UNIPD.IT

WEBSITE: RESEARCH.DII.UNIPD.IT/TES/