ESERCIZI

Funzioni lineari e matrici

Esercizio 1. Si consideri la matrice A_β in $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \beta & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di A_β al variare di β.

(b) Si determini per quali valori di β il sistema

$$A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

ha soluzioni.

(c) Per $\beta = 3$ si consideri la funzione lineare f_{A_3} associata ad A_3. Si determini una base per l'immagine e una base per il nucleo di f_{A_3}. La funzione f_{A_3} è iniettiva? è suriettiva? (le risposte devono essere giustificate).

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + \alpha\, x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare la dimensione dell'immagine di f in funzione del parametro α e dire per quali valori di α la funzione f è suriettiva.

(c) Per il valore di α per cui $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $\operatorname{Ker} f$.

(d) Esistono valori di α per i quali f è iniettiva? Giustificare la risposta.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & t & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ per mezzo dell'algoritmo di Eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = 5$ per il resto dell'esercizio. Sia U lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A; determinare una base $\mathscr{B}$ di U estraendola dalle colonne di A.

(c) Determinare una base del $\operatorname{Ker}(A)$.

(d) Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 1, 2)$.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, -x - 3z, y - z, x + 3z),$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la matrice M associata a f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare una base del nucleo di f e la nullità di f. L'applicazione f è iniettiva?

(c) Determinare una base dell'immagine di f e il rango di f. L'applicazione f è suriettiva?

(d) Determinare se il vettore $v = (-1, 3, 1, -3)$ appartiene all'immagine di f e in caso affermativo, determinare la controimmagine $f^{-1}(v)$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ è uguale a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base dell'immagine di f e del nucleo di f.

(b) Determinare per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, il vettore $(1, t, 1, 0)$ appartiene all'immagine di f.

(c) Determinare la controimmagine del vettore $(0, 2, 0, 1)$ mediante f.