

Lezione 10

martedì 4 novembre 2025

14:30

Determinante

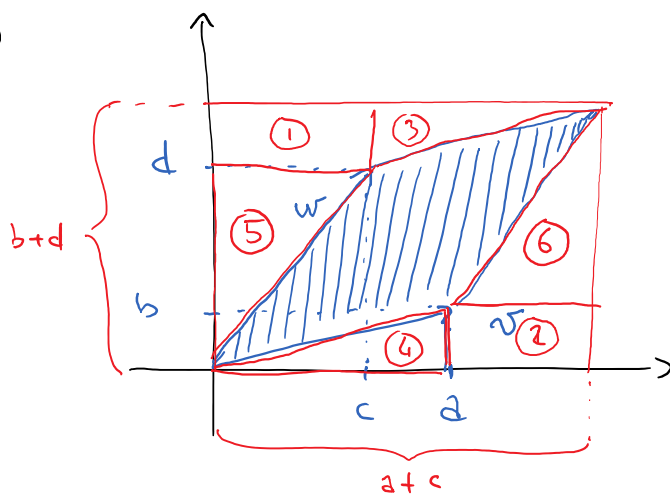
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Alcune proprietà del determinante:

$$(1) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix} = ad \quad (\text{vale anche per matrici } n \times n)$$

$$(2) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (\text{idem})$$

(3)



$$v = (a, b)$$

$$w = (c, d)$$

Area del parallelogramma =

$$= (a+c)(b+d) - 2bc - ab - cd =$$

$$= \cancel{ab} + ad + bc + \cancel{cd} - 2bc - \cancel{ab} - \cancel{cd} =$$

$$= ad - bc$$

Determinante $2 \times 2 \longleftrightarrow$ Area

(Determinante $3 \times 3 \longleftrightarrow$ Volume)

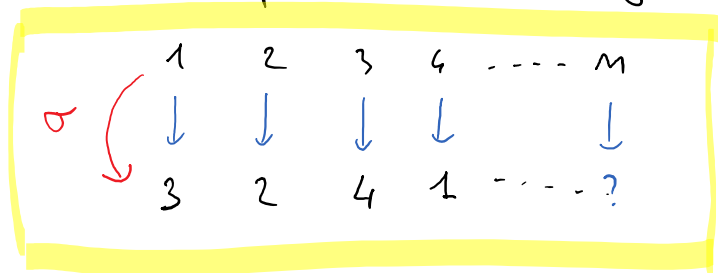
Definizione generale:

Matrice $n \times n$: $A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgno}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$$

σ $\rightarrow$ sommatoria su tutte le permutazioni σ

σ è una permutazione degli indici $1, 2, \dots, n$



$\text{sgno}(\sigma) = \begin{cases} + & \text{se numero pari di scambi} \\ - & \text{se numero dispari di scambi} \end{cases}$

Esempio : $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \sigma_1 & 1 & 2 \\ \hline & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 \end{array} \right)$$

0 scambi

$$\left(\begin{array}{c|cc} \sigma_2 & 1 & 2 \\ \hline & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 1 \end{array} \right)$$

1 scambio

$$\det A = + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$m=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\sigma_2 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\sigma_3 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\sigma_4 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\sigma_5 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\sigma_6 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

(In generale le permutazioni di n oggetti sono $n!$)

$$\det A = + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - \\ - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

← (regola di Sarrus)

Formula di Laplace

A matrice $n \times n$

Scegliamo la riga i : $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A_{i+1,1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \det A_{i+1,2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \cdot \det A_{i+1,n}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

A_{i1} è ottenuta cancellando la riga i e la colonna 1

A_{i2} " " " " " " " 2

$\vdots$

A_{in} " " " " " " " n

(c'è una formula analoga per le colonne)

Esempio:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

uso la formula di Laplace
lungo la 3^a riga

$$\det A = (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 = 18$$

$$-2 + 0 + 4 - (-4) - 0 - 0 = 18$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$