Lezione 20

Esercizi

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Serie a segni alterni, del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \geq 0.$$

Utilizzo per studiarla il criterio di Leibenitz. Devo verificare che la serie sia decrescente e infinitesima
$(a_{n+1} \leq a_n)$ $\left(\lim_{n \to +\infty} a_n = 0\right)$.

Verifico la decrescenza: $a_{n+1} \leq a_n$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$ vero se e solo se

$$\sqrt[3]{n+2} \geq \sqrt[3]{n+1}$$ vero se e solo se
(tutti termini ≥ 0)

$n+2 \geq n+1$, ok!

Verifico che è infinitesima

$\lim_{n} a_n = 0$:

$\lim_{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$ Vero.

Quindi, per il criterio di Leibnitz, converge.

Oss Mi chiedo se potevo risolvere anche usando il criterio della convergenza assoluta: Noto che

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1/\sqrt[3]{n+1}}{1/\sqrt[3]{n}} = 1 \right)$$

asintoticamente equivalente

esempio

Però: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}$

$\frac{1}{3} < 1$, dunque questa serie diverge.

Quindi, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

diverge, quindi la serie

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$$

non converge assolutamente (ma converge per Leibenitz).

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n \cdot n}$$

È una serie a segni alterni $n \geq 2$ in poi. Cioè

$n=1$: $\frac{-1}{3-4} = +1$

$n=2$ $\frac{1}{12+8} = \frac{1}{20}$

$n=3$: $\frac{-1}{3 \cdot 9 - 4 \cdot 3} < 0$

$n=4$: $\frac{1}{3 \cdot 16 + 4 \cdot 4} > 0$

eccetera, cioè $\frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n\cdot n} < 0$ per $n \geq 3$, dispari

$$\frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n\cdot n} > 0 \text{ per } n \geq 4, \text{ pari.}$$

(in altre parole, si verifica facilmente che

$$3n^2+4(-1)^n\cdot n \geq 0$$

$\forall n \geq 3$, dunque il segno di

$$\frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n\cdot n}$$

è $(-1)^n$.

Cerco di utilizzare il criterio di Leibnitz, e mostro che non posso applicarlo perché la successione non è decrescente. Verifico questo: devo studiare la disequazione

$$\frac{1}{3(n+1)^2+4(-1)^{n+1}\cdot(n+1)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3n^2+4(-1)^n\cdot n}$$

per n abbastanza grandi.
Studio per prima cosa il caso in cui
n è dispari: La disequazione da studiare
è:

$$\frac{1}{3(n+1)^2+4(n+1)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3n^2-4n}$$

Questa disequazione è equivalente alla:

$$\cancel{3n^2}+3+6n+4n+4 \geq \cancel{3n^2}-4n$$

$14n+7 \geq 0$, che è sempre vera
$\forall n \geq 0$.
Quindi per n dispari la disuguaglianza
da verificare è vera.
Vediamo ora cosa succede per n pari:
la disuguaglianza è:

$$\frac{1}{3(n+1)^2-4(n+1)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3n^2+4n}$$

Questa disuguaglianza è equivalente a:

$$3(n+1)^2 - 4(n+1) \geq 3n^2 + 4n$$

cioè:

$$\cancel{3n^2} + 6n + 3 - 4n - 4 \geq \cancel{3n^2} + 4n$$

cioè

$$-2n \geq 1 \iff 2n \leq -1.$$

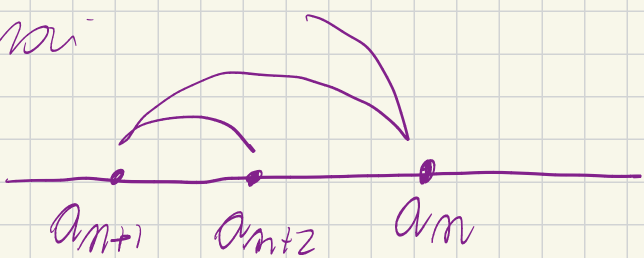
cioè

$$n \leq -1/2$$

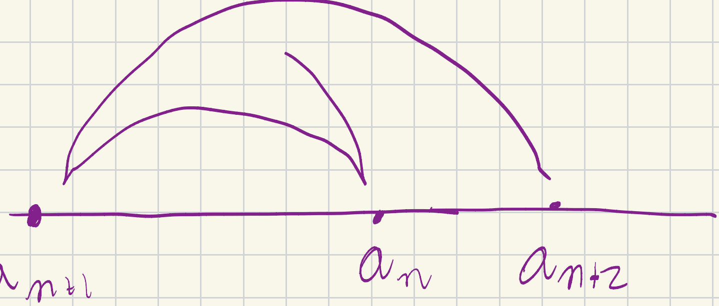
che non è mai verificata per $n \geq 3$.

Quindi la serie non è decrescente, quindi non posso applicare Leibnitz.

Oss: Abbiamo quindi mostrato che siamo in questa situazione per n dispari



Oppure



(in realtà, è la prima situazione: verificato).

Uso l'unico criterio che mi rimane ovvero quello della convergenza assoluta.
Studio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n n} \right|$$

Ricordo che $3n^2+4(-1)^n n \geq 0$ per $n \geq 3$, dunque studio la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+4(-1)^n n}$$

Questa serie è asintoticamente equivalente alla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$$

poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2+4(-1)^n \cdot n} \cdot 3n^2 = 1.$$

Poiché la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ converge, allora

anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+4(-1)^n \cdot n}$

converge, dunque la serie iniziale

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+4(-1)^n \cdot n}$ converge assolutamente,

quindi converge per il criterio di convergenza assoluta.

Funzioni di variabile reale

Ricordo: sono funzioni $f: D \to \mathbb{R}$,
$D \subseteq \mathbb{R}$, detto dominio.
La prima domanda da porsi è chi sia D.
Dobbiamo quindi stabilire le condizioni di esistenza di f.

Esempi:
(1) Se $f = \frac{A}{B}$, voglio $B \neq 0$.
(2) Se $f = \ln(A)$ voglio $A > 0$
(3) Se $f = \sqrt{A}$, voglio $A \geq 0$.

Esercizio Trovare il dominio, o le condizioni di esistenza, della

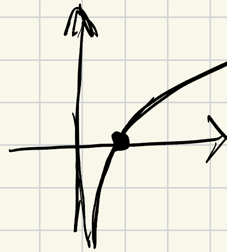
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\ln(x-1)}.$$

(a): $x+4 \geq 0$ per l'esistenza di $\sqrt{x+4}$.
(b) $x-1 > 0$ per l'esistenza di $\ln(x-1)$

(c) $\ln(x-1) \neq 0$ perché $\ln(x-1)$ è a denominatore;

$\ln(x-1) = 0 \iff x-1 = 1$

$\iff x = 2.$



Studio le condizioni separatamente.

(a) $x+4 \geq 0 \iff x \geq -4$

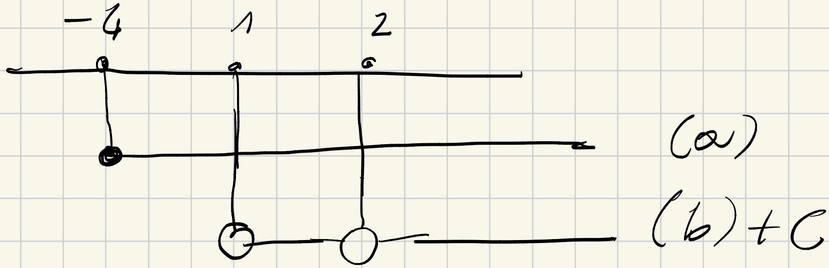
(b) $x-1 > 0 \iff x > 1$

(c) $x \neq 2$

CONVENZIONI GRAFICHE.

- ○ f non è definita nel pto
- ● f è definita nel pto
- —— linea continua significa che la funzione è definita

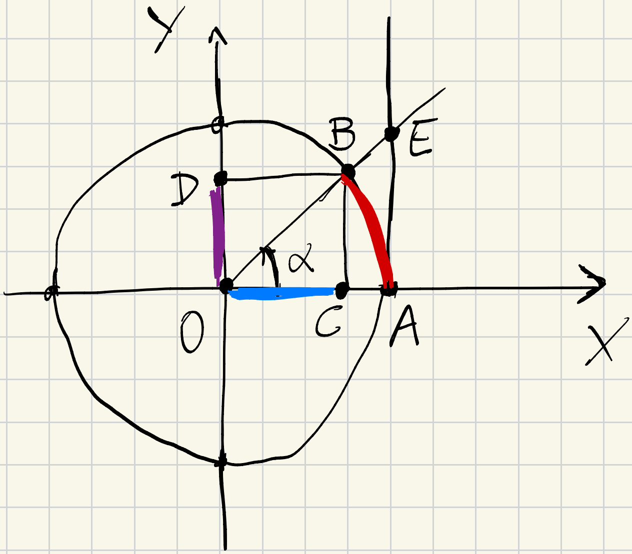
Ora metto insieme le condizioni



Perciò $f(x)$ è definita per $x>1$, $x \neq 2$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2,\ x > 2\}.$

Funzioni trigonometriche



Circonferenza di raggio 1 ha equazione

$$x^2+y^2=1$$

Indico con α la misura in radianti dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ = la parte di circonferenza segnata in rosso.

Ricordo:

GRADI	RADIANTI
0°	0
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$

$\cos\alpha = OC$

$\sin\alpha = OD$. $\Rightarrow$ le coordinate di B sono $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

Abbiamo $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$

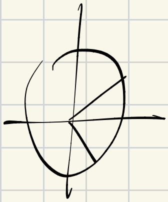
Definisco anche

$tg(\alpha) = AE$.

Noto che

$$AE = \frac{AE}{OA} = \frac{BC}{OC} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

i triangoli OAE e OCB sono simili (3 angoli corrispondenti uguali)



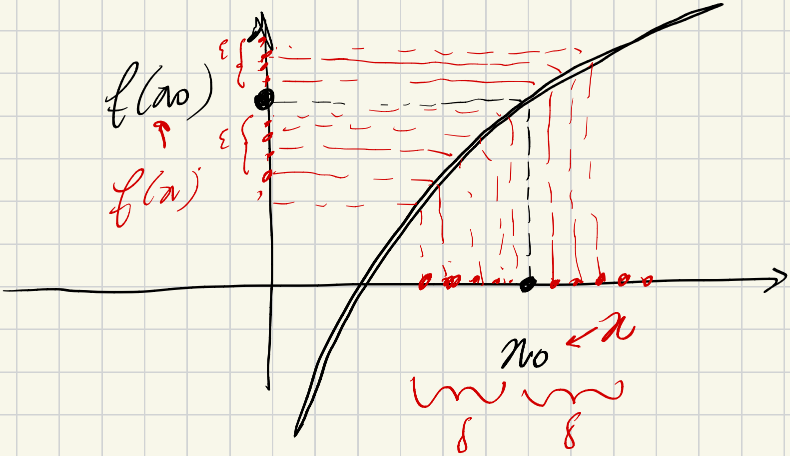
Ricorda anche:

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Limiti di funzioni

Supponiamo che $f: D \to \mathbb{R}$ funzione.



Def Sia $f: D \to \mathbb{R}$. Dico che per $x_0 \in D$ si ha

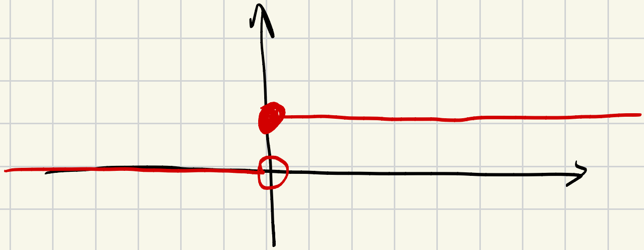
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad , \ell \in \mathbb{R}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ con $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, con $x \neq x_0$ si ha

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Esempio Definisco la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

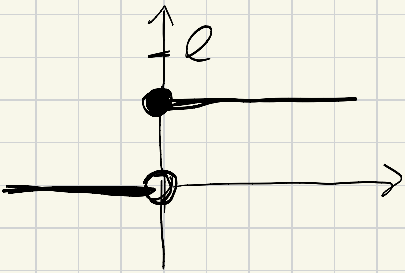


Allora il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ non esiste: suppongo che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l$$

per qualche numero reale l. Mostro che un tale valore di l non esiste:

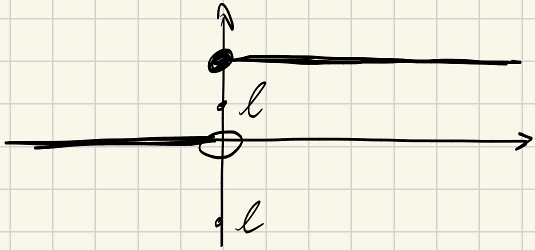
(•) l non può essere > 1.



$\forall \varepsilon < l-1,\ \forall \delta > 0,\ \forall 0 < x < \delta$

$|f(x) - l| = |1 - l| > \varepsilon.$

(•) l non può essere < 1.

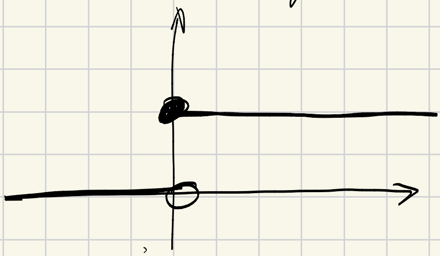


$\forall \varepsilon < 1-l, \; \forall \delta > 0,$

$\forall \; 0 < x < \delta,$

$|f(x) - l| = |1-l| > \varepsilon$

(·) l non può essere $= 1$.



$\forall \varepsilon < 1, \; \forall \delta > 0,$

$\forall \; -\delta < x < 0,$

$|f(x) - 1| = 1 > \varepsilon.$

Dunque, la definizione di

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l$$

non è verificata per nessun l, dunque il limite non esiste.

Def. Dico che $f : D \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u> nel punto $x_0 \in D$ se $f(x_0) = l$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l.$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

non è continua in $x_0 = 0$.

Anche nel caso delle funzioni, come nel caso delle serie, avremo a che fare con forme indeterminate, del tipo

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty - \infty.$$

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Noto che il dominio di questa funzione è $x \neq 0$ (cioè $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$).

È una forma indeterminata, del tipo $\frac{0}{0}$.

Per risolverla, ricordo che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Sostituisco:

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots -1}{x}$$

$$= 1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)$$

$$= 1.$$

Conclusioni:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

<u>Oss</u> Anche se la funzione $\frac{e^x-1}{x}$ non è definita per $x=0$, so che

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Perciò, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, compreso $\bar{x} = 0$.