Domanda 5: Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività.

Proposizione: un'applicazione lineare $f: V \to W$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$.

Dimostrazione:

Ipotesi: f lineare.

Tesi: f è iniettiva $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$.

"$\Longrightarrow$" Dimostriamo che se f è lineare e iniettiva $\Longrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

Sia $v \in \operatorname{Ker} f$ allora essendo $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$

$f(v) = 0_W = f(0_V)$

↑ perché f è lineare

essendo f iniettiva allora $v = 0_V$.

"$\Longleftarrow$" Dimostriamo che se f è lineare e $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ allora f è iniettiva cioè se $\underline{f(v_1) = f(v_2)}$ allora $v_1 = v_2$.

Se $\underline{f(v_1) = f(v_2)} \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_W \xrightarrow{f \text{ è lineare}}$

$f(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ cioè

$v_1 - v_2 = 0_V \Longrightarrow \underline{v_1 = v_2}.$ $\square$

Attenzione:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

Non è lineare in quanto non rispetta la somma

$f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$f(x_1)+f(x_2) = x_1^2+x_2^2 \neq$ se $x_1x_2 \neq 0$

$$\{v\in\mathbb{R} \mid f(v)=0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2=0\} = \{0\}$$

f NON è iniettiva perché $f(-1)=f(1)=1$.

Esempio:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+3y\\2x-y\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}x=0\\y=1\end{matrix}$

calcoliamo $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$. f è iniettiva? f è suriettiva? f è biettiva?

Sv:

$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2)\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\rangle \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$

non multipli

La matrice rispetto alla base canonica è la matrice dei coefficienti

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$\uparrow f(e_1) \quad \uparrow f(e_2)$

le colonne di A sono esattamente

$f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Allora $\left.\begin{matrix}\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^2\\ \dim \operatorname{Im}(f) = 2\end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \text{ cioè } f \text{ è suriettiva}}$

Formule delle dimensioni:

$$\begin{matrix}\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f\\ 2 = ? + 2\end{matrix} \qquad \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow f \text{ è iniettiva}}$

Essendo iniettiva e suriettiva $\longrightarrow$ f è biettiva.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x-y\end{pmatrix} \qquad Ker f=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \middle| f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases}x+3y=0\\2x-y=0\end{cases} \quad \begin{cases}x+6x=0\\y=2x\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \quad \text{cioè } Ker f=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V=\dim Ker f+\dim Im f \Rightarrow \dim Im f=2 \Rightarrow Im f=\mathbb{R}^2$$

$$2 = 0 + ? \qquad Im f \leq \mathbb{R}^2$$

Domanda 6: Formula delle dimensioni

Teorema:

Sia $f: V \to W$ applicazione lineare e V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n=\dim V$ allora

$$\boxed{\begin{aligned} n=\dim V &= \dim Ker f+\dim Im f \\ n &= k + (n-k)\end{aligned}}$$

Dimostrazione:

Essendo $Ker f \leq V \Rightarrow \dim Ker f = k \leq \dim V = n$ sia

$B_{Ker f}=\{v_1,\dots,v_k\}$ base di $Ker f$ e completiamola a base di V

$$B_V=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$$

Per dimostrare $\dim Im f=n-k$ cerchiamo una base di $Im f$

$$Im f=\langle \underbrace{f(v_1)}_{0_W},\dots,\underbrace{f(v_k)}_{0_W}, f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)\rangle$$

$$f(v_i)=0_W \quad \forall\, i=1,\dots,k \quad \text{perché } v_i\in Ker f \quad i=1,\dots,k$$

$$Im f=\langle f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)\rangle$$

Dobbiamo dimostrare che $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$ sono linearmente indipendenti

$B_V = \{ v_1, \dots, v_k // , v_{k+1}, \dots, v_n \}$ $\qquad V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$

$= \mathrm{Ker} f \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$

$= a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0_W$ $\qquad$ e dimostriamo che

per linearità $\qquad a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_n = 0$

$= f(a_{k+1} v_{k+1} + a_{k+2} v_{k+2} + \dots + a_n v_n) = 0_W$ $\qquad$ perciò

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \mathrm{Ker} f \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = \{0_V\}$$

$\Longrightarrow a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = 0_V$ ma $v_{k+1}, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti perché sono nella base $B_V \Longrightarrow a_{k+1} = \dots = a_n = 0$. $\square$

Conseguenze:

Domanda: esistono applicazioni lineari iniettive a $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$?

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ $\qquad \mathrm{Im} f \leq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f \leq 3$

$4 = 1 + 3$

$4 = 2 + 2$

$4 = 3 + 1$

$4 = 4 + 0$

$\Longrightarrow$ Non esiste un'applicazione lineare iniettiva da $\mathbb{R}^4$ ad $\mathbb{R}^3$.

Se $f: V \longrightarrow W$ è lineare $\dim V = n$ $\quad \dim W = m$ $\quad n > m$

$\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \dim \mathrm{Im} f = n - \dim \mathrm{Im} f \geq n - m > 0$

$- \dim \mathrm{Im} f \geq -m$

$\mathrm{Im} f \leq W \Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f \leq \dim W = m$

2) Esistono applicazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$?

No $\quad \dim V = 3 = \dim Ker f + \dim Im f$

$\underline{\dim Im f} = 3 - \dim Ker f \leq \underline{3}$ $\quad$ ma $W = \mathbb{R}^4$

$3 = \dim Ker f + \dim Im f$ $\quad$ Non è suriettiva

$3 = 0 + 3$

$3 = 1 + 2$

$3 = 2 + 1$

$3 = 3 + 0$

3) $f: V \to W$ con $\dim V = \underline{\dim W = n}$

$\boxed{n = 0 + n}$

$\dim V = n = \dim Ker f + \dim Im f$

f è iniettiva $\iff \dim Ker f = 0 \iff \dim Im f = n \iff Im f = W$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva $\iff$ f è biettiva.

Struttura della controimmagine:

Sia $f: V \to W$ applicazione lineare e $w \in W$ allora

$$f^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin Im f \\ \boxed{v_0 + Ker f} & \text{se } w \in Im f \end{cases}$$

cioè $\exists\, v_0 \in V$ tale che $f(v_0) = w$

Dim:

$w \in Im f \iff f^{-1}\{w\} \neq \emptyset$ $\quad$ perciò se

$w \notin Im f \Rightarrow f^{-1}\{w\} = \emptyset$

Invece se $w \in \operatorname{Im} f$ cioè $\exists\, v_0 \in V$ tale che $\boxed{f(v_0) = w}$ allora

$$f^{-1}\{w\} := \{v \in V \mid \underline{f(v) = w}\} \underset{=}{=} \{v_0 + v' \mid v' \in \operatorname{Ker} f\} = v_0 + \operatorname{Ker} f$$

$\subseteq$ sia $v \in V$ con $\underline{f(v) = w}$

$v = v_0 + v'$ cioè

$v' = v - v_0$ $\quad v' \in \operatorname{Ker} f$ perché $f(v') = f(v - v_0) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lineare}}}{=} f(v) - f(v_0) =$

$= w - w = 0_W$

$\supseteq$ $v = v_0 + v'$ con $\underline{v' \in \operatorname{Ker} f}$ dimostriamo $f(v) = w$ perché

$f(v) = f(v_0 + v') = f(v_0) + f(v') = w + \underline{0_W} = w.$ $\quad \square$

Esempio:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ x+3y \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f \quad \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ cioè $\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow f$ è iniettiva

$f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \begin{cases} x+y = 2 \\ x+2y = 3 \\ x+3y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2-y \\ 2-y+2y = 3 \\ 2-y+3y = 4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 2-y \\ y = 1 \\ 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker} f$

$= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+2y \\ x+2y \end{pmatrix}$ $\qquad \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$2 = 1 + 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\2\\2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker} f \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \qquad x=-2y \qquad \mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\3\\3 \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad x = 3-2y$$

$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\3\\3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \underset{y=0}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Ker} f$$

Condizioni nec. e suff. per definire un'applicazione lineare:

Fatto:

Siano V e W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e

$w_1, \dots, w_n$ vettori di W (anche uguali fra loro)

allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ tale che $f(v_i) = w_i \ \forall i = 1, \dots, n.$

Perché ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ allora per linearità

$$\boxed{f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.}$$

Esempio:

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$ $\quad f(v_i) = w_i$

$W = \mathbb{R}^3$ $\quad w_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$ $\quad w_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ esiste un'unica applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+2y\\x+3y\end{pmatrix}$$