

October 30, 2025

**ESERCIZI PER IL CORSO DI MATEMATICA
CHIMICA-CHIMICA INDUSTRIALE-SCIENZA DEI MATERIALI
SETTIMANA IV**

Esercizio 1. Utilizzando il criterio del confronto, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - 1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(n+2)\sqrt{n+4}}.$$

Esercizio 2. Utilizzando il criterio asintotico, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + \cos(2n) + 5}{2n^2 + 7};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + \ln(n) + 5 \sin(n)}{5n^7 + 9};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + (\ln(n))^2 + 3^{n+1}}{-3n^4 - 2n^{-n} + 3^{2n}};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - \cos(4n)}{\ln(n^2) + \sin(3n) + n^4}.$$

Esercizio 3. Utilizzando il criterio della radice, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{5^n} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^{n^4}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il criterio del rapporto, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!n^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n}.$$

Esercizio 5. Utilizzando il criterio di Leibnitz, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 + 7};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n + 1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Esercizio 6. Utilizzando il criterio di convergenza assoluta, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 5(-1)^n n}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 + 4(-1)^n n}.$$

Esercizio 7. Stabilire il carattere delle seguenti serie (dire se convergono, divergono o oscillano)

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{3n^2 + 4};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-3n^2 - 2n + 6);$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5}}{n + 3};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+5} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}}.$$

Esercizio 8. Studiare la convergenza delle seguenti serie geometriche (cioè, dire per quali x convergono e per quali divergono) e calcolarne, se possibile, la somma:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-2} \right)^n.$$

Esercizio 9. Dimostrare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}.$$

Suggerimento per la prima: notare che

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right)$$

e quindi che

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \frac{1}{(2(n+1)+3)(2(n+1)+5)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2(n+1)+3} - \frac{1}{2(n+1)+5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2(n+1)+5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+7} \right) \end{aligned}$$

ed usare la stessa tecnica utilizzata per studiare a lezione la serie di Mengoli.

Esercizio 10. Utilizzando il criterio del confronto, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n+4}.$$

Suggerimento per la prima: notare che $\frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3}$.

Esercizio 11. Mostrare che $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Svolgimento. Ammetteremo senza dimostrazione (come abbiamo fatto a lezione) i seguenti risultati (per gli approfondimenti, si veda il libro di testo o uno dei fogli di esercizi precedenti).

Teorema 1 (Teorema sulle successioni monotone). *Ogni successione crescente e limitata ammette limite finito. La stessa cosa vale per le successioni decrescenti limitate.*

Teorema 2 (Teorema della permanenza del segno). *Se $a_n \leq b_n$ per ogni n ed esistono entrambi i limiti, si ha $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.*

Ricordo che

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Poniamo

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Sappiamo che $\lim_n b_n = e$ per definizione. Dal binomio di Newton sappiamo che

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq a_n \end{aligned}$$

dove la prima disuguaglianza deriva dal fatto che tutti i termini del tipo $1 - \frac{k}{n}$ sono maggiori di 0 e minori di 1 per $0 \leq k \leq n-1$. Abbiamo dunque concluso che

$$(0.1) \quad b_n \leq a_n.$$

D'altra parte, abbiamo anche per $0 \leq m \leq n$

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \frac{1}{m!}$$

è minore o uguale di

$$b_n = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n!}$$

perché la prima espressione contiene meno termini della seconda, e tutti i termini che mancano sono positivi. Facciamo tendere n ad infinito (con m fissato) ed otteniamo, per ogni m ,

$$a_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} \leq \lim_n b_n = e.$$

Segue che $n \mapsto a_n$ è una successione crescente e limitata (che sia crescente è ovvio, che sia limitata è appena stato dimostrato, visto che $a_m \leq e$ per ogni m). Da questo segue che $\lim_n a_n$ esiste (per il teorema delle successioni monotone).

Ora, abbiamo $b_n \leq a_n$ dalla (0.1) e dunque $e = \lim_n b_n \leq \lim_n a_n$ (per il teorema della permanenza del segno). D'altra parte, dal fatto che $a_m \leq e$ segue che $\lim_n a_n \leq e$. Quindi $\lim_n a_n \leq e$ e $\lim_n a_n \geq e$, dunque $\lim_n a_n = e$. $\square$

Esercizio 12. Mostrare che per ogni numero reale $x > 0$ si ha $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proof. Suggestimento: Imitare la dimostrazione precedente. $\square$