Lezione 19

Strategia per studiare le serie a termini positivi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(1) Controllare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$: se questo non accade, la serie non converge $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \right)$

(2) Usare la gerarchia degli infiniti (se possibile) ottenendo minorazioni o maggiorazioni con serie che conosciamo $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \right)$

(3) Usare uno dei criteri della radice o del rapporto.

Esercizi

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n.$$

Noto che è una serie a termini positivi.
Uso il criterio della radice. Studio

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim_n \frac{3}{n} = 0 < 1$$

dunque la serie converge, per il criterio della radice.

Ricorda: $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ < 1: converge; > 1: diverge; $= 1$: non so.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

È una serie a termini positivi. Uso il criterio del rapporto:

$$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \; ; \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Calcolo

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n} 2\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\cancel{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \lim_{n} 2\cdot\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)^n$$

$$= \lim_{n} 2\cdot\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

$$= \lim_n 2 \cdot \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)^{-1} =$$

$$= \frac{2}{e} \quad , \left(\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \right)$$

ma $e > 2$, dunque $\frac{2}{e} < 1$, perciò la serie converge.

Oss Invece, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$, $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ diverge! calcoli simili (esercizio) mostrano che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1 .$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}$, $a_n = \frac{n+e^n}{(n+1)!}$

Uso il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)+e^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{n+e^n}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{(n+1)+e^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n+e^{n}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{(n+1)+e^{n+1}}{n+e^{n}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cdot\cancel{(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{e^{n}}\left(e+\frac{n+1}{e^{n}}\right)}{\cancel{e^{n}}\left(1+\frac{n}{e^{n}}\right)} \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$= \lim_{n} \frac{e+\frac{n+1}{e^{n}}}{1+n/e^{n}} \cdot \frac{1}{n+2} = 0$$

$\frac{n+1}{e^{n}} \to 0$, $n/e^{n} \to 0$

$$\lim_{n} \frac{n+1}{e^{n}} = 0 \quad , \quad \lim_{n} \frac{n}{e^{n}} = 0$$

dunque la serie converge.
Posso anche utilizzare il criterio del confronto asintotico, in questo modo.
Osservo che

$$n+e^n \simeq e^n$$

Raccogliere e^n e semplificare

$$\left(\lim_n \frac{n+e^n}{e^n} = \lim_n \left(\frac{1+n/e^n}{1}\right) = 1\right)$$

Quindi, motivato da $n+e^n \simeq e^n$, verifico che:

$$\frac{n+e^n}{(n+1)!} \simeq \frac{e^n}{(n+1)!}$$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^n} = \lim_n \frac{n+e^n}{e^n} = 1.$$

Perciò:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}$$ converge se e solo se

converge la serie $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}.$$

Rapporto:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{e^{n+1}}{e^n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{e}{n+2} = 0$$

quindi converge la $\sum \frac{e^n}{(n+1)!}$, perciò anche quella iniziale.

(4) Esercizio.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin(n)}{\sqrt{2n^3+3n+1}}$$

Noto che è una serie a termini positivi. $\forall n$ ($a_n \geq 0$, $\forall n$; infatti risulta

osservate che se n è abbastanza grande, poiché $\sin(n) \in [-1,1]$, allora $n+\sin(n) \geq 0$, $\forall n$ e $n+\sin(n) > 0$ se n è abbastanza grande ($n+\sin(n) \geq n-1$)

Uso il criterio del confronto asintotico, ispirato dal fatto che $\sin(n) \in [-1,1]$.

e dal fatto che $3n+1$ è trascurabile

rispetto a $2n^3$ (uso quindi la gerarchia degli infiniti nel secondo caso)

Verifico quindi che

$$\frac{n+\sin(n)}{\sqrt{2n^3+3n+1}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2n^3}}$$

Calcolo il limite

$$\lim_n \frac{\dfrac{n+\sin(n)}{\sqrt{2n^3+3n+1}}}{\dfrac{n}{\sqrt{2n^3}}} =$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin(n)}{n}\right)}{\sqrt{\cancel{2n^3}\left(1+\frac{3}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2n^3}}}{\cancel{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{1+\frac{\sin n}{n}}{\sqrt{1+3/2n^2+1/2n^3}} = 1.$$

Notiamo che $\lim_n \frac{\sin(n)}{n} = 0$ perché

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$$

$\lim_n \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, quindi per allineazione di limiti, $\lim_n \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Perciò studio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge a $+\infty$.

(ricorda che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge se e solo se $\alpha > 1$).

Perciò anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin n}{\sqrt{2n^3+3n+1}}$ diverge.

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^5 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + n^2 - 2}{\ln(n) + \sqrt[3]{n^7 - 2} + n^2}$$

È una serie a termini positivi, mostro che è asintoticamente equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n^{7/3}}$$

$\lim_n \frac{e^n}{n^{7/3}} = +\infty$ per gerarchia degli infiniti

che $\boxed{\text{diverge}}$, quindi anche la serie iniziale diverge.

Mostro che le due serie sono asintoticamente equivalenti:

$$\lim_n \left(\frac{e^n + n^5 - \cos(1/n) + n^2 - 2}{\ln(n) + \sqrt[3]{n^7 - 2} + n^2} \cdot \frac{n^{7/3}}{e^n} \right) =$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{e^n}\left(1 + \frac{n^5}{e^n} - \frac{\cos(1/n)}{e^n} + \frac{n^2}{e^n} - \frac{2}{e^n}\right) \cancel{n^{7/3}}}{\cancel{n^{7/3}}\left(\frac{\ln(n)}{n^{7/3}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^{7/3}}} + \frac{n^2}{n^{7/3}}\right) \cancel{e^n}} =$$

$$\lim_{n} \frac{1 + \underbrace{n^5/e^n}_{\to 0} - \underbrace{\cos(1/n)/e^n}_{\to 0} + \underbrace{n^2/e^n}_{\to 0} - \underbrace{2/e^n}_{\to 0}}{\underbrace{\ln(n)/n^{7/3}}_{\to 0} + \sqrt{1 - \underbrace{2/n^{7/3}}_{\to 0}} + \underbrace{\frac{1}{n^{1/3}}}_{\to 0}} = 1$$

(quasi tutti i limiti sono per gerarchia degli infiniti)

Serie a segni alterni.

Esempio $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Sono serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

con $a_n \geq 0$, almeno per n abbastanza grande.

Criterio di Leibenitz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ una serie a segni alterni ($a_n \geq 0$). Se:

(1) la successione $n \mapsto a_n$ sia decrescente: $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots$

(2) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, cioè la successione $n \mapsto a_n$ è infinitesima.

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Converge.

<u>Oss</u> Grazie al criterio di Leibenitz, posso mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

Converge: verifico entrambe le condizioni:

(1) la successione degli a_n è decrescente se $a_n = \frac{1}{n}$, dove verificare che $a_n \geq a_{n+1}$, cioè che

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \geq n \text{, vero!}$$

(2) devo mostrare che la $n \mapsto a_n$ è infinitesima, cioè $\lim_n a_n = 0$, ma

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0 \text{, ok!}$$

Però, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Oss Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{DIVERGE}$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{CONVERGE.}$$

Caso generale: serie a termini di segno qualunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Posso considerare una seconda serie a termini positivi, ovvero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

(è a termini positivi: per studiarla ho molti metodi: criterio rapporto, radice, confronto asintotico.....).

Teorema Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (si dice in questo caso che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente).

Oss. Notare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ potrebbe convergere anche se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge: ad esempio,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge per Leibnitz, ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, il teorema non ci dice nulla su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Perciò la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è una condizione <u>sufficiente</u> <u>ma non necessaria</u> per la convergenza della $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.