

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \langle (1, 2, -1) \rangle, \quad s : \begin{cases} x + z = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

- Determinare le equazioni cartesiane della retta r e le equazioni parametriche della retta s .
- Determinare la posizione reciproca tra le rette r e s (ossia se sono parallele, sghembe o incidenti). Determinare la distanza tra r e s .
- Determinare se esiste un piano contenente le due rette. In caso affermativo, trovare l'equazione cartesiana del piano e le sue equazioni parametriche.
- Determinare le equazioni parametriche della retta l contenuta nel piano di equazione $y + 2z = 3$, passante per il punto $Q = (3, 3, 0)$ ed ortogonale alla retta s .

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare una base $\mathcal{B}$ di U e la dimensione di U .
- Completare l'insieme $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.
- Determinare se il vettore $u = (2, -1, 3, 1)$ appartiene a U e in caso affermativo determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (a).
- Determinare se il sottospazio U è contenuto nel sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. In caso affermativo, determinare un sottospazio W di V (per esempio esibendo una sua base) in modo che $U \oplus W = V$.

Esercizio 3. (a) Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + \ln(n)}{\sqrt{n^3 + 3n}}$$

- (b) Calcolare il seguente integrale: $\int x(\ln x)^2 dx$

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{1-x}$$

- Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescenza di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f , specificando se si tratta di massimi o minimi relativi o assoluti.
- Calcolare la derivata seconda di f , studiare la concavità e la convessità e determinare gli eventuali punti di flesso di f .
- Disegnare un grafico qualitativo di f .