Lezione 18

Esempio (Serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Noto che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (*)$$

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

uso (*) per tutti gli interi da 1 a n

$$= \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{\frac{1}{2\cdot 1}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{\frac{1}{3\cdot 2}} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}}_{\frac{1}{(n-1)\cdot n}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1, \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Confronto tra serie

Idea: confrontare tra loro due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Def. Dico che le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono asintoticamente uguali, e scrivo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

se si ha

$$\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Principio del confronto asintotico

Suppongo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

allora una delle due serie converge se e solo se converge anche l'altra.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l_1 \in \mathbb{R} \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n = l_2 \in \mathbb{R} \right).$$

Oss. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, non c'è nessuna ragione per confrontare l_1 e l_2, cioè l_1 e l_2 possono essere uguali, diversi, $l_1 > l_2$, $l_1 < l_2$.

Esempio Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad , \; a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n}} \qquad , \; b_n = \frac{1}{n^2+e^{-n}}$$

Dimostriamo che le due serie sono asintoticamente uguali.

Basta calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2+e^{-n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + e^{-n}}{n(n+1)}$$

$n^2 + n = n^2(1 + 1/n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{e^n \cdot n^2}\right)}{\cancel{n^2}(1 + 1/n)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2 e^n}}{1 + 1/n} = 1.$$

$\frac{1}{n^2 e^n} \to 0$, $1/n \to 0$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + e^{-n}} \text{ converge.}$$

__Oss__ Se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = c$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

allora posso concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c);$$

notiamo anche che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge o l se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} cb_n$ converge a $c \cdot l$,

cioè:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = l \iff \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot b_n = c \cdot l.$$

Infatti le somme parziali di $\sum_{n=0}^{\infty} cb_n$ sono:

$$cb_0 + cb_1 + \dots + cb_n = c(b_0 + b_1 + \dots + b_n).$$

Criteri di convergenza delle serie

Primo criterio

Suppongo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga
e che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$, $l \in \mathbb{R}$.

Considero le somme parziali

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Perciò $\quad S_n - S_{n-1} = a_n.$

D'altra parte, ho

$$\lim_n (s_n - s_{n-1}) = \underbrace{\lim_n s_n}_{= l} - \underbrace{\lim_n s_{n-1}}_{= l} = 0$$

se $\lim_n a_n$ e $\lim_n b_n$ esistono finiti,
$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$

$\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = \lim_{m\to+\infty} s_m = l$

pongo $m = n-1$
e noto che se $n \to +\infty$
allora $m \to +\infty$.

Ma $s_n - s_{n-1} = a_n$, quindi

$$\lim_n a_n = 0$$

Punto:

$$\boxed{\text{Se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge, allora } \lim_n a_n = 0}$$

Equivalentemente:

dico che gli a_n sono infinitesimi

$$\boxed{\text{Se } \lim_n a_n \neq 0, \text{ allora } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ non converge}}$$

Esempio

(1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ non converge, perché

$$\lim_n \frac{n}{n+5} = \lim_n \frac{n}{n(1+5/n)} = 1.$$

(2) Mostreremo (non ora, ma quando faremo la teoria degli integrali) che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ non converge (diverge a } +\infty)$$

Notare però che, in entrambi i casi,

$\lim_n a_n = 0$:

$$\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

(in qualche senso, pur essendo una successione decrescente con limite 0, la $n \mapsto \frac{1}{n}$ decresce troppo lentamente per poter far convergere anche le somme parziali; in particolare, $\forall M \in \mathbb{R}$, esiste n t.c.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > M).$$

<u>Teorema</u> Una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, converge se e solo se $\alpha > 1$.

<u>Oss.</u> Lo dimostreremo usando gli integrali; per chi già li conosce:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \approx \int_{1}^{N} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln N - \ln(1) = \ln(N)$$

$$\to +\infty \text{ per } N \to +\infty$$

Se $\alpha > 1$.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \approx \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

per $N \to +\infty$ converge.

Oss la convergenza di $\frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$ e la divergenza di $\frac{1}{n}$ si possono dimostrare anche senza gli integrali, con tecniche di tipo combinatorico e stime.

Criterio di convergenza (Confronto).

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie, con $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ (serie a termini positivi). Suppongo che $a_n \leq b_n$ per n abbastanza grande (cioè: esiste N t.c. $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N$). (ad esempio, possiamo supporre che $a_n \leq b_n$, $\forall n$). Allora:

(1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche la

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, anche la $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

<u>Oss</u> $0 \le a_n \le b_n$

converge $\Longleftarrow$ converge

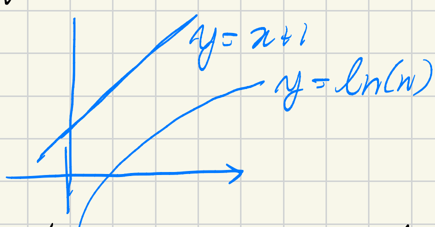
$0 \le a_n \le b_n$

diverge $\Longrightarrow$ diverge

<u>Esempio</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$: converge?

Posso minorare in questo modo:

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \le \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{diverge}} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{converge}}}_{\text{diverge}}$$



Quindi, <u>non posso</u> applicare il teorema.

Posso però raffinare questa idea:

Cerco una funzione di questo tipo.

$$\lim_{n} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

GERARCHIA DEGLI INFINITI

Ricordo: $\boxed{\ln(n) \le n^{1/2} = \sqrt{n}}$. Perciò

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \le \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La disequazione $\ln(n) < \sqrt{n}$ vale, almeno per n abbastanza grande.

Converge: $\alpha = 3/2 > 1$

dunque, per il teorema anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \quad \text{converge.}$$

<u>Oss</u> Stessa idea per studiare, ad esempio

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$$

$\ln(n) \le \sqrt[4]{n}$, per n abbastanza grande:

$\lim_{n} \frac{\ln(n)}{\sqrt[4]{n}} = 0$, gerarchia degli infiniti

Sostituendo

$$\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} \le \frac{\sqrt[4]{n}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2-1/4}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

$\frac{5}{4} = \alpha > 1$, quindi $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ converge,

dunque anche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ converge.

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi

cioè $a_n \geq 0$ (per n abbastanza grande, cioè $a_n \geq 0$ per $n \geq N$, $\exists N$)

(•) Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora la serie

converge: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

(•) Se $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora la serie

diverge: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(•) Se $\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = 1$, il criterio non ci dà informazioni.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi,

cioè $a_n \geq 0$ (per n abbastanza grande, cioè $a_n \geq 0$ per $n \geq N$, $\exists N$).

(○) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora la serie converge

(○) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora la serie diverge

(○) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, il criterio non dà informazioni.

Esempio $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. per $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

serie a termini positivi.

Uso il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = x \cdot \frac{n!}{(n+1)\, n!} =$$

$$= \frac{x}{n+1}.$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0$, e poiché $0<1$, il criterio del rapporto dice che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

<u>Esempio</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

GERARCHIA DEGLI INFINITI

Sappiamo che $\lim_{n} \frac{n^n}{n!} = +\infty$, perciò la serie non è infinitesima (cioè $\lim_n a_n \neq 0$)

Quindi, la serie non converge.

Possiamo anche verificare la non convergenza tramite il criterio del rapporto o della radice.

<u>Rapporto</u> $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1}.$

Mostrare che $\lim_{n} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} > 1.$

$$\lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n+1} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Longrightarrow$ la serie diverge