

Lezione 9

martedì 28 ottobre 2025 14:30

Se $f: V \rightarrow W$ lineare, $v_1, \dots, v_m$ base di V
 $w_1, \dots, w_m$ base di W

e A è la matrice di f nelle basi fissate.

Come posso usare A per calcolare $f(v)$?

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v nella
base $v_1, \dots, v_m$

Per calcolare $f(v)$ basta moltiplicare $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$

$f: V \rightarrow W$ funzione lineare

Nucleo di f , indicato con $\ker(f)$

$$\ker f = \left\{ v \in V \mid \underbrace{f(v) = \vec{0}} \right\}$$

↓
equivalente a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\ker f$ è l'insieme delle soluzioni di un
sistema lineare omogeneo.

Immagine di f , indicata con $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \left\{ w \in W \mid w = f(v) \text{ per qualche } v \in V \right\}$$

In generale $\text{Im } f \subseteq W$

Si ha $\text{Im } f = W$ se f è suriettiva.

Si ha che f è iniettiva se e solo se $\text{Ker } f = \{ \vec{0} \}$.

Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ base di V ,

$\{ f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) \}$ determinano $\text{Im } f$

ma non sono una base di $\text{Im } f$.

Per trovare una base di $\text{Im } f$ devo prendere solo i vettori che sono linearmente indipendenti.

Le colonne della matrice di f corrispondono

a $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$.

Una base di $\text{Im}(f)$ si ottiene prendendo le colonne linearmente indipendenti della matrice di f .

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \dim(\text{Im } f) &= \text{numero di colonne lin. indipendenti} \\ &= \text{ranko (per colonne)} \\ &= \text{ranko (per righe)} \end{aligned}$$

Teorema. Sia $f: V \rightarrow W$ una funzione lineare.

$$\text{Allora } \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V.$$

Dimostrazione.

Sia $m = \dim V$, sia A la matrice di f rispetto a una qualche scelta di basi di V e W .

$$\ker f = \text{insieme delle soluzioni di } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco A in forma a scala:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{x} & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{x} & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & \boxed{x} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \boxed{x} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \boxed{x} & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{x} & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & \boxed{x} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \boxed{x} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} r \text{ righe} \neq 0 \\ \text{rank} = r \end{array}$$

Quindi $\dim(\text{Im } f) = r$.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è equivalente a } A' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 m incognite
 r equazioni

ci sono $m-r$
incognite
libere di
variare

Quindi lo spazio delle soluzioni di questo sistema, cioè $\ker f$, ha dimensione $m-r$.

$$\underbrace{\dim(\ker f)}_{m-r} + \underbrace{\dim(\text{Im } f)}_r = m = \dim V$$

Q.E.D.

Sia $f: V \rightarrow W$ funzione lineare.

Sia $w \in W$.

$$f^{-1}(w) = \left\{ v \in V \mid \underbrace{f(v) = w}_{\substack{\text{coordinate di } w \\ \downarrow}} \right\}$$

$\uparrow$
 immagine inversa di w

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

Attenzione: NON confondere l'immagine inversa
 con la funzione inversa $V \xleftarrow{f^{-1}} W$

Una funzione è invertibile se e solo se è
 iniettiva e suriettiva (cioè biettiva).

$f: V \rightarrow W$ è suriettiva se $\text{rank di } f (= \dim \text{Im } f)$
 coincide con $\dim W$.

È anche necessario che $\dim W = \dim V$

Quindi, si deve avere $\dim V = m = \dim W = \underbrace{\dim(\text{Im } f)}_{\text{rank}}$

Si ha:

$$\underbrace{\dim(\text{Ker } f)}_0 + \underbrace{\dim(\text{Im } f)}_m = m$$

Affinché una funzione (o una matrice) sia invertibile
 bisogna che il rank sia il massimo possibile, cioè m .

Una matrice è invertibile se e solo se è quadrata,

$M \times M$, e il suo rango è M .

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è invertibile?}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \leftarrow \text{rango } 2$$

$\nearrow$
 $2^{\text{a}} \text{ riga} + 3 \times 1^{\text{a}} \text{ riga}$

Sì, A è invertibile, quindi esiste A^{-1} .

Come posso calcolare la matrice inversa A^{-1} ?

Per matrici 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

si scopre che $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

A^{-1} esiste se e solo se $ad-bc \neq 0$.

Il numero $ad-bc$ determina se la matrice A è invertibile oppure no.

Definizione. $ad-bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\uparrow$
determinante