

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$

$$a) \quad \mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim U = 3$$

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim W = 2$$

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim(U \cap W) = 1 \Rightarrow \text{Non sono in somma diretta}$$

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{B}_{U+W} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$b) \quad W: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Completamento di } \mathcal{B}_U \text{ a base di } \mathbb{R}^4: \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solveremo questi punti:

c) Determinare una base per $T \leq \mathbb{R}^4$: $T \oplus (U \cap W) = W$

Determinare una base per $S \leq \mathbb{R}^4$: $S \oplus (U \cap W) = U$

d) Dimostrare che $Z = \langle e_1, e_4 \rangle$ è in somma diretta con W .

Determinare un due vettori $\{v_1, v_2\}$ tali che

$\{e_3, e_4, v_1, v_2\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$ e anche

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1, v_2 \right\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$.

e) Scrivere il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$;
i vettori u e w sono unici?

Ricordiamo che $U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) Determiniamo B_T

$$T \oplus (U \cap W) = W$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2 = ? + 1$$

$$\dim W = \dim T + \dim(U \cap W)$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

perché in somma diretta

$$\Rightarrow \dim T = 1 \quad T = \langle z \rangle \quad z \in \mathbb{R}^4 \quad z \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_T = \{z\}$$

$$B_T \cup B_{U \cap W} = \left\{ z, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{sia base di } W$$

Per aggiungere z dobbiamo cercare $z \in W$, ma $z \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
possiamo prendere $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Determiniamo B_S : $S \oplus (U \cap W) = U$

$$? + 1 = 3 \quad \dim S = 2$$

$$B_S = \{z_1, z_2\} \quad z_1, z_2 \in U \quad \text{linearmente indipendenti}$$

$$B_S \cup B_{U \cap W} = \left\{ z_1, z_2, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{deve essere base di } U$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$z_1 \quad z_2 \quad \uparrow$ $z_1 \quad z_2$

Cerchiamo $z_1 \in B_U$ ma $z_1 \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

cerchiamo $z_2 \in U$ ma $z_2 \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a \\ -2a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \\ -2a=0 \\ a+b=-2 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$$\Rightarrow S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

d) $Z = \langle e_1, e_4 \rangle$ verificare che Z e W sono in somma diretta.

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim W = 2$ $\dim Z = 2$ Z e W sono in somma diretta se e solo se

$$\dim(W+Z) = 4 \quad (\text{perché} \Leftrightarrow \dim(W \cap Z) = 0)$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad ?$$

$$\begin{array}{l} 1^a R \\ 3^a R - 1^a R \\ 4^a R \\ 2^a R \end{array} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

Si

$$\dim(W+Z) = 4 \Rightarrow \text{Sono in somma diretta.}$$

Def: W e Z sono in somma diretta

$$\text{e solo se } W \cap Z = \{ \vec{0} \} \Leftrightarrow$$

$$\dim(W \cap Z) = 0.$$

$$\dim(W+Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$$

$$4 = 2 + 2 - 0$$

Determinare un due vettori $\{v_1, v_2\}$ tali che

$\{e_1, e_4, v_1, v_2\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$ e anche

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1, v_2 \right\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{l} 2 \\ Z \oplus \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} W \oplus \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^4 \\ 2 \end{array}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

↓

$$\bar{z} \oplus \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^4$$

$$W \oplus \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^4$$

2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1^o \\ 2^o \\ 3^o \\ 4^o \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{matrix} 1^o \\ 3^o \\ 2^o \\ 4^o - a1^o \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1^o \\ 3^o \\ 2^o \\ (4^o - b3^o) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \downarrow 4^o - a1^o$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b+a & c-a & d-a \end{pmatrix}$$

$$\downarrow 4^o - (b+a) \cdot 2^o$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & d-a \end{pmatrix}$$

$\downarrow 4^o - (c-a)3^o$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

$d \neq a$

e) Scrivere il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$; i vettori u e w sono unici?

Ricordiamo che $U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

In a) abbiamo visto $U + W = \mathbb{R}^4$

$$U + W = \left\{ u + w \mid u \in U, w \in W \right\} = \mathbb{R}^4 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in U + W$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = u + w$$

$$u \in U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$w \in W: \boxed{w} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ -a-b \\ 2-a \end{pmatrix}$$

↑

$$u \in U$$

$$(1-a) - 2a - a - b - 2a = 0$$

$$-1 - 3a - b = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$-1 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 0 = 0$$

$$b = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u \quad w$

$$-1 - 3a - b = 0$$

$$3a + b = -1$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/3 \\ b = 0 \end{cases}$$

la scrittura

non è unica.

$$z \in U \cap W \text{ e } w \neq \vec{0}$$

$$\begin{matrix} u & + & w & = & (u+z) & + & (w-z) \\ u & & w & & u & & w \end{matrix}$$

sono due scritture diverse

" $U \oplus W \Leftrightarrow$ la scrittura $u+w$ è unica"

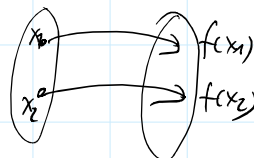
Applicazioni lineari

$$f: X \rightarrow Y$$

X dominio

Y codominio

f si dice iniettiva:

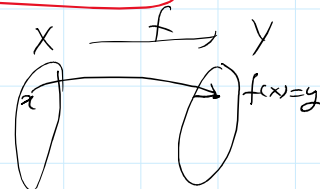


Se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad \text{Non è iniettiva.} \quad f(1) = 1^2 = 1 \\ f(-1) = (-1)^2 = 1$$

Def: f si dice suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$



Def: data f funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice:

immagine di f $\text{Im } f = \{ f(x) \mid x \in X \} = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \text{ con } f(x) = y \}$

antiimmagine o controimmagine di un sottoinsieme $B \subseteq Y$

$$f^{-1}(B) = f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}.$$

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

f non è iniettiva: se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) = x_1^2 \neq f(x_2) = x_2^2$?

Non è sempre vero se $x_2 = -x_1$ $f(x_1) = f(x_2)$

f non è suriettiva perché $-1 \in Y = \mathbb{R}$ non esiste un $x \in X = \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2 = -1$

$$B = [0, 1] \quad f^{-1}(B) = \{ x \in X = \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 \in [0, 1] \} = [-1, 1]$$

$$x^2 \in [0, 1] \quad ? \quad 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

Definizione: una funzione

$$f: V \rightarrow W$$

con V e W $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali, si dice **LINEARE** se

$$\textcircled{1} \quad f(\vec{0}) = \vec{0} \quad \boxed{f(0_V) = 0_W}$$

② Conserva la somma:

$$\boxed{f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V}$$

③ Conserva il prodotto per scalari:

$$\boxed{f(av) = a f(v) \quad \forall v \in V, \forall a \in \mathbb{R}}$$

Esempi:

1) Queste funzioni sono lineari?

$$\begin{aligned} \text{a) } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x+1 \end{aligned}$$

NON è lineare.

$$\begin{aligned} \text{b) } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= 7x \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad f(0) = 7 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{1} \quad \underline{f(x_1 + x_2)} = 7(x_1 + x_2) = (7x_1) + (7x_2) = \underline{f(x_1)} + \underline{f(x_2)} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{f(ax)} = 7(ax) = a(7x) = \underline{af(x)} \quad \checkmark$$

ESEMPIO:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ n \times 1 & & m \times 1 \end{array}$$

$$\boxed{f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{c} m \times n \quad n \times 1 \end{array}$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\text{è lineare perché } \left| \begin{array}{l} f \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \checkmark$$

è lineare perché

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \\ f(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = f(v_1) + f(v_2) \quad \checkmark \\ f(av) = A(av) = a(Av) = a f(v) \quad \checkmark \end{cases}$$

Esempio:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 8y + z \\ x - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

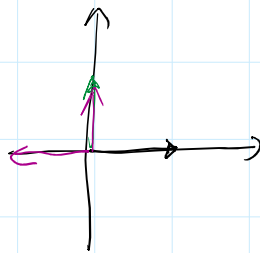
Ex: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x + 11y \\ 18x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 18 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$



rotazione di $\frac{\pi}{2}$.