

Lezione 17

Ricorda (.) dato $n \mapsto a_n$ successione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$S_n =$ somma parziale

$$= \sum_{j=0}^n a_j.$$

(.) Esempi: $1, 1$; $a_n = n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \text{ perché}$$

$$\lim_n S_n = \infty.$$

Def Dico che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$, e serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Dico che diverge se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pm \infty$, serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm \infty.$$

Possono estendere uno degli esempi precedenti, cioè 1, 1, al caso generale:

Serie geometriche

Sono del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Guardo le somme parziali:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n.$$

Uso l'olotopia per semplificare queste espressioni. Noto che

$$\begin{aligned} (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) &= \\ &= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + q^n - \cancel{q} - \cancel{q^2} - q^3 - \dots - q^{n+1} = \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusione (parziale)

S_n soddisfa l'equazione

$$S_n \cdot (1 - q) = 1 - q^{n+1}.$$

Oss. Moltiplicare per $1-q$ e' un trucco
che mi permette di scrivere s_n come

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

almeno quando $q \neq 1$!

Puoi, se $q \neq 1$, posso calcolare il
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(*) Suppongo che $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0 \text{ perch\'e } |q| < 1.$$

infatti: poich\'e $|q| < 1$, posso dire che

$$0 < |q| < 1 \Rightarrow 0 < |q|^2 < |q| < 1$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^3 < |q|^2 < |q| < 1 \Rightarrow \dots$$

$\dots$ $|q|^{n+1} < |q|^n$ perciò la nostra successione decrescente, limitata da 0, che converge, dunque

$$\lim_n |q|^n = 0$$

da cui $\lim_n q^n = 0$.

Perciò, se $|q| < 1$, la serie converge e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(•) $q \geq 1$. $\rightarrow$ primo caso in cui $|q| > 1$

$$\text{Se } q > 1, s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow +\infty$$

$$\text{però } \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \text{ quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = +\infty$$

(•) $q < -1 \rightarrow$ secondo caso in cui $|q| > 1$.

Caso più complicato:

$$q^{n+1} = (-1)^{n+1} |q|^{n+1}$$

Se $n+1$ è pari:

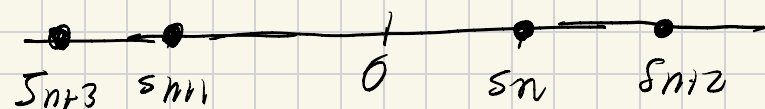
$$\lim_n \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_n \frac{1 - |q|^{n+1}}{1 + |q|} = -\infty$$

Se $n+1$ è dispari:

$$\lim_n \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_n \frac{1 + |q|^{n+1}}{1 + |q|} = +\infty.$$

perciò la $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ non converge, ma

neppure diverge. Infatti la successione delle somme parziali oscilla e non ha limite, né finito, né $\pm\infty$.



Resta il caso $q=1$, dove ho

$$s_n = \sum_{j=0}^n q^j = \sum_{j=0}^n 1^j = \sum_{j=0}^n 1 = n+1.$$

però

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$

Conclusione: la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i$$

converge n e solo se $|q| < 1$,
e la sua somma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Esempio: $q = \frac{1}{10}$,

$$1, \bar{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Come già sapevamo!

Esempio $q = \frac{3}{5}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Es. Se $q = -1$ (attenzione: avevo dimenticato di disavvertirlo prima!) ho

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

è una serie a segni alterni. Le somme parziali sono:

$$S_0 = (-1)^0 = 1$$

$$S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

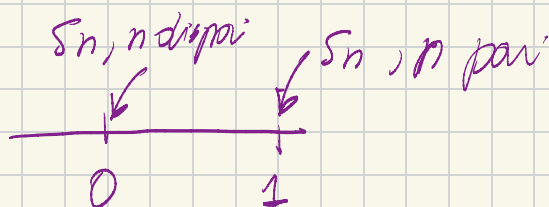
$$s_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$s_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

In generale,

$$s_n = 1 \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$s_n = 0 \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$



la serie $n \mapsto s_n$ non converge a nessun valore ($n \in \mathbb{R}$, $n \neq \pm \infty$)

dunque anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

non converge o diverge.

Potete anche usare la formula trovata prima (ma è più laborioso):

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{per } q = -1 \text{ diventa}$$

$$S_n = \frac{1 \pm 1}{2} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

a seconda della parità di n .