

Lezione 16

Volta scorsa avevamo osservato usando il binomio di Newton, che potevamo scrivere e^x come una somma infinita:

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Esempi di somme infinite

$$(1) = 1, \overline{1} = 1,111111\dots$$

$$= 1 + 0,1 + 0,001 + 0,0001 + \dots$$

$$= \frac{10}{9}$$

$$(2) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = +\infty$$

Oss. Dato che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

possiamo approssimare e per $x=1$ come

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

e con' wa. Ad esempio

$$e = 2,7182818 \dots$$

e with

pure due cifre
corrette

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,7166 \dots$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = 2,718281801$$

prime 7 cifre corrette

081 $\frac{1}{20!} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_8 4$
8 zeri

Gerarchia degli infiniti

$$n < n^2 < n^3 < \dots < n^r < n^{r+1} < \dots < e^n < n! < n^n$$

Intendendo: il $\lim_{n \rightarrow \infty}$ del
quoziente di ciascuno per il precedente
è ∞ .

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5}{n^4} = +\infty \quad (\text{già lo sappiamo}).$$

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^r} = +\infty \quad \text{per qualunque } r \geq 0$$

(l'esponenziale cresce più di qualunque potenza).

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^r} = +\infty \quad \forall r \geq 1$$

(il fattoriale cresce più dell'esponenziale,
e dunque anche di qualunque potenza)

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n^r} = +\infty \quad \forall r \geq 1.$$

Esempi

(1) Confronto esponenziale e polinomi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^{10}} = \lim_n \frac{1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3!} + \dots + \frac{n^{10}}{10!} + \frac{n^{11}}{11!} + \dots}{n^{10}}$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{n^{10}}}{\cancel{n^{10}}} \left(\underbrace{\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^9} + \frac{1}{2n^8} + \dots + \frac{1}{10!}}_{\frac{1}{10!}} + \frac{n}{11!} + \dots \right)$$

$$= +\infty$$

*l'insieme
perché tendono
tutti a $+\infty$*

$\leftarrow \frac{n^2}{12!} + \frac{n^3}{13!} + \dots$

(2) Confronto tra esponenziale e fattoriale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\underbrace{e \cdot e \cdot e \cdot \dots \cdot e \cdot e \cdot e}_{n \text{ volte}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{e \cdot e \cdot \dots \cdot e \cdot e \cdot e}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} \cdot \frac{2}{e} \cdot \frac{3}{e} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{e} \cdot \frac{n-1}{e} \cdot \frac{n}{e} \right)$$

$$\text{Ora, } \lim_n \frac{n}{e} \rightarrow +\infty$$

$$\text{dunque } \lim_n \left(\underbrace{\frac{1}{e} \cdot \frac{2}{e} \cdot \frac{3}{e} \cdots \frac{n-1}{e} \cdot \frac{n}{e}}_{\text{velocit\`a} > 0} \right) = +\infty$$

Per\`o:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$$

(3) Confronto tra $n!$ e n^n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{n \text{ volte}}}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot n}_{\geq 1} \right)$$

$$\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

$+\infty$

Oss

$$(\cdot) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^r} = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{e^n} = 0$$

(1)

$$(\cdot) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$

(2)

$$(\cdot) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

(3)

Infine, valgono anche la seguente gerarchia degli infiniti:

$$\ln(n) < n^r \text{ per ogni } r > 0$$

Confronto tra $\ln(n)$ e n^r

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{\ln(n)} = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^r} = 0$$

(4)

$\forall r > 0$

Calcolando, per $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\ln(n)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(e^t)^\alpha}{\ln(e^t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha t}}{t} = +\infty$$

sostituendo $n = e^t$, cioè $t = \ln(n)$, $t < e^t$

e notano che per $n \rightarrow +\infty$ $\ln(n) \rightarrow +\infty$
 $\parallel$
 $t \rightarrow +\infty$

Ricorda

(*) grafico di e^x



Oss(°) e^x non è suriettiva, ma è iniettiva ed è crescente

(*) $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

allora e^x è iniettiva e suriettiva,
e la sua inversa è $x \mapsto \ln(x)$.

(*) dunque

$\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

e ha come grafico



(*) Proprietà:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^b) = b \ln(a)$$

(*) Logaritmo in base 10: è l'inversa
della $x \mapsto 10^x$.

$$\text{cioè } \log_{10}(10^a) = a.$$

Esercizio

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n^2 - 2n + 4} + \ln(n^2 + 3)}{n^2 - 2n + 1} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt[3]{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} + \ln(n^2 + 3)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_n \frac{n^{2/3} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} + \ln(n^2 + 3)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_n \frac{n^{2/3} \sqrt{1 - 2/n + 4/n^2} + \ln(n^2(1 + 3/n^2))}{n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}$$

$$= \lim_n \frac{n^{2/3} \sqrt{1 - 2/n + 4/n^2} + \ln(n^2) + \ln(1 + 3/n^2)}{n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}$$

$$= \lim_n \frac{n^{2/3} \sqrt{1 - 2/n + 4/n^2} + 2\ln(n) + \ln(1 + 3/n^2)}{n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}$$

$$= \lim_n \frac{n^{2/3} \left(\sqrt{1 - 2/n + 4/n^2} + \frac{2\ln(n)}{n^{2/3}} + \frac{\ln(1 + 3/n^2)}{n^{2/3}} \right)}{n^{4/3} n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}$$

So per garanzia degli inputi che

$$\lim_n \frac{\ln(n)}{n^{2/3}} = 0.$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{1 - 2/n + 4/n^2} + 2 \frac{\ln(n)}{n^{2/3}} + \frac{\ln(1 + 3/n^2)}{n^{2/3}}}{n^{4/3} (1 - 2/n + 1/n^2)} = 0.$$

(il numeratore tende a 1, il denom. $\rightarrow +\infty$).

Oss $\lim_n \frac{\ln(1 + 3/n^2)}{n^{2/3}} = 0$ perché $\lim_n \ln(1 + \frac{3}{n^2}) = 0$

però $\lim_n \frac{\ln(1 + 3/n^2)}{n^{2/3}}$

è del tipo $\frac{0}{\infty} = 0$.

$\ln(1) = 0$

Esercizio $\lim_n (n^{1/n})$ F.I. del tipo ∞^0 .

Osservo che $n^{1/n} = \sqrt[n]{n} = e^{\ln(n^{1/n})}$

$= e^{\frac{1}{n} \ln(n)}$

$= e^{\frac{\ln(n)}{n}}$

$\lim_n (n^{1/n}) = \lim_n e^{\frac{\ln(n)}{n}}$

Ma $\lim_n \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (regola degli infiniti)

da cui

$\lim_n (n^{1/n}) = \lim_n (\sqrt[n]{n}) = e^0 = 1$.

Es. $\lim_n \left(\frac{n^x}{\ln(n^n)} \right), \quad x \geq 0, x \in \mathbb{R}.$

$$= \lim_n \frac{n^x}{n \ln(n)} = \lim_n \left(\frac{n^{x-1}}{\ln(n)} \right)$$

TRE CASI

(.) $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1: \lim_n \frac{n^x}{\ln(n^n)} = \lim_n \frac{n^{x-1}}{n \ln(n)} = +\infty$

geranza
degli input

(.) $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_n \left(\frac{n}{\ln(n^n)} \right) = \lim_n \left(\frac{1}{\ln(n)} \right) = 0$$

(.) $x < 1,$

$$\lim_n \frac{n^x}{\ln(n)} = \lim_n \frac{1}{n^{1-x} \cdot \ln(n)} = 0.$$

$$x < 1 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow n^{1-x} \rightarrow +\infty$$

Serie

Ricordo:

$$1, \bar{1} = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

definita per $n \geq 0$

Se $n \mapsto a_n$ è una successione, denoto
con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

la somma della serie.

Ad esempio, serie

$$1, \bar{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

Dato una successione $n \mapsto a_n$, definita
per $n \geq 0$, definiamo le somme parziali:

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

⋮

$$s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Def Chiamo somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

In simbol:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n}$$

La somma della serie è il limite delle
somme parziali.

Es. Se $a_n = n$

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = 0 + 1$$

$$s_2 = 0 + 1 + 2 = 3$$

⋮

$$s_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k(k+1)}{2} = +\infty.$$