

Domanda 2:

Enunciare e dimostrare le formule di Grassmann.

Enunciato delle Formule di Grassmann:

Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e siano U e W sottospazi di V . Allora

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U+W) = n + m - k$$

Dimostrazione:

$U \cap W \leq V$ quindi ha dimensione finita perché V ha dimensione finita
e $B_{U \cap W} = \{u_1, \dots, u_k\}$ sia base di $U \cap W$ $\dim(U \cap W) = k$

Completiamo $B_{U \cap W}$ ad una base B_U di U e ad una base B_W di W entrambe finite perché V ha dimensione finita.

$$B_U = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\} \quad \dim(U) = n$$

$$B_W = \{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_m\} \quad \dim(W) = m$$

Dimostriamo che $\dim(U+W) = n+m-k$

$$U+W = \left\langle \underbrace{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n}_n, \underbrace{\cancel{u_1}, \dots, \cancel{u_k}, w_{k+1}, \dots, w_m}_m \right\rangle =$$

$$= \langle u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n, w_{k+1}, \dots, w_m \rangle$$

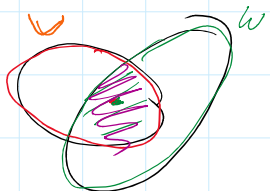
$B_{U+W} = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n, w_{k+1}, \dots, w_m\}$ contiene $n+m-k$ vettori;
genera $U+W$

Dobbiamo dimostrare che i vettori in B_{U+W} sono linearmente indipendenti.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) + \left(\sum_{j=k+1}^m b_j w_j \right) = \vec{0} \quad \text{ha } n+m-k \text{ addendi}$$

Scopo: dimostrare che

$$\begin{cases} a_1 = \dots = a_n = 0 \\ b_{k+1} = \dots = b_m = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{*} \quad \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right)}_U = - \underbrace{\left(\sum_{j=k+1}^m b_j w_j \right)}_W \in U \cap W = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$


$$- \sum_{j=k+1}^m b_j w_j = \sum_{j=1}^k b_j u_j \quad \boxed{\sum_{j=1}^k b_j u_j + \sum_{j=k+1}^m b_j w_j = \vec{0}}$$

$B_W = \{ \underline{u_1, \dots, u_k}, \underline{w_{k+1}, \dots, w_m} \}$ sono linearmente indipendenti

$$\Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0 \quad b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$$

sostituiamo in $\textcircled{*}$

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = - \left(\sum_{j=k+1}^m 0 \cdot w_j \right) = \vec{0} \quad \text{essendo} \quad \sum_{i=1}^n a_i u_i = \vec{0} \quad \text{ma}$$

$B_U = \{ u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n \}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

□

Conseguenze:

1) Sia $B_V = \{ \underline{v_1, \dots, v_n} \}$ base di V

$$B_V = \{ v_1, \dots, v_k / v_{k+1}, \dots, v_n \}$$

$$U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

$$\underline{\dim U = k}$$

$$\underline{\dim W = n - k}$$

F. di Grassmann $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$$n = k + n - k - ?$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{ \vec{0} \} \quad U \text{ e } W \text{ sono in somma diretta}$$

$$U \oplus W = V$$

2) Se $U \oplus W = V$ cioè $\begin{cases} U + W = V \\ U \cap W = \{ \vec{0} \} \end{cases}$

allora $B_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ è base di U

$B_W = \{w_1, \dots, w_h\}$ è base di W

$B_U \cup B_W = \{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h\}$ è base di $U \oplus W = V$

$$\dim V = \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = k + h - 0.$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinare: una base B_U di U , $\dim U$; una base B_W di W e $\dim W$; una base $B_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base B_{U+W} di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?

(b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base B_U a una base di $\mathbb{R}^4$.

(c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$

Esercizio:

a) $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_4 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$$

↑

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \dim(U)$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } U \text{ perché generatori lin. ind.}$$

$$\Rightarrow \dim U = 3$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim W = 2$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

generano W e sono lin. indip. perché non sono multipli.

Calcoliamo $U \cap W$

$$w = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+b \\ a \end{pmatrix} \in W$$

$w \in U$ se esob se verifia l'equazione: $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$
 $a - 2(-a) + (a+b) - a = 0$

$$2a + a + b = 0 \quad b = -3a$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a-3a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim(U \cap W) = 1 \Rightarrow U \cap W \text{ sono in somma diretta}$$

F. di Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \\ = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad \text{e} \quad \dim(U+W) = 4 \quad \Rightarrow \quad U+W = \mathbb{R}^4 \quad \dim(U+W) = 4$$

$$B_{U+W} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2° metodo:

$$U+W = \langle u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 \rangle$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

u_1, u_2, u_3, w_1, w_2

genera $U+W$, mettiamoli in righe
in una matrice:

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 - u_1 \\ w_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 - u_1 + u_2 \\ w_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 (w_1 - u_1 + u_2) - u_3 \\
 w_2 - u_3
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & -1
 \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{array}{l}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 w_2 - u_3 \\
 w_1 - u_1 + u_2 - u_3 - 3(w_2 - u_3)
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

$-3 + x(-1) = 0 \quad -3 - x = 0 \quad x = -3$
 $-3 - 3(-1) = -3 + 3 = 0$

Le righe non nulle della matrice a scale sono una base $U+W$

$$\Rightarrow \dim(U+W) = 4 \quad B'_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{u_1} \quad \underline{u_2} \quad \underline{u_3} \quad \underline{w_2 - u_3}$

$$\begin{aligned}
 w_1 - u_1 + u_2 - u_3 - 3w_2 + 3u_3 &= \vec{0} \\
 -u_1 + u_2 + 2u_3 + w_1 - 3w_2 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

↑

Relazione di dipendenza tra i vettori u_1, u_2, u_3, w_1, w_2

$$\begin{array}{ccc}
 w_1 - 3w_2 & = & u_1 - u_2 - 2u_3 \in U \cap W \\
 W & \cap & U
 \end{array}
 \quad
 w_1 - 3w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Equazioni cartesiane

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = a \\
 x_2 = -a \\
 x_3 = a+b \\
 x_4 = a
 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione dei parametri:

$$a = x_1$$

$$\begin{cases}
 x_2 = -x_1 \\
 x_3 = x_1 + b \\
 x_4 = x_1
 \end{cases}$$

$$b = x_3 - x_1 \quad \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$$

$$\text{Eq. cart. di } W : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1-1=0 & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0+0=0 \checkmark \\ 0-0=0 \checkmark \end{array}
 \end{array}$$

Completare la base B_U a base di $\mathbb{R}^4$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim U = 3$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow \text{manca un vettore}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right\}$$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad \left[v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$5 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$$

$$\text{Eq. cont. di } U \text{ e } \boxed{x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0}$$

↗

$$0 - 2 \cdot 0 + 0 - 1 \neq 0$$

$$1 - 2 \cdot 0 + 0 - 0 \neq 0$$

$$v^j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$