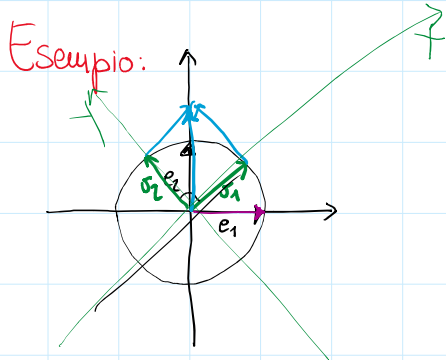


Basi: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Generatori} \\ \text{Linearmente Indipendenti} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \forall v \in V$ $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ esistono unici i coefficienti $a_1, \dots, a_n$.
 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (v)_B$ vettore delle **coordinate** del vettore v rispetto alla base B .



$E = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$
 $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

$$B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinare il vettore di $\mathbb{R}^2$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B .

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dato il vettore $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ determinare le coordinate di u rispetto alla base B .

$$B = \{v_1, v_2\}$$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad u = a v_1 + b v_2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} b = 1 & 1^\circ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 & 2^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} a = 1 \\ \sqrt{2} b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = -1/\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Problema 1: determinare una base dati dei generatori

$V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ $G = \{v_1, \dots, v_k\}$ se sono dipendenti

posso eliminare il vettore v_i se $a_i \neq 0$ in una relazione di dipendenza.
 $G_1 = G - \{v_i\}$ è insieme di generatori.

Problema 2: dato un insieme di vettori linearmente indipendenti
 come aggiungere vettori in modo che restino linearmente indipendenti?

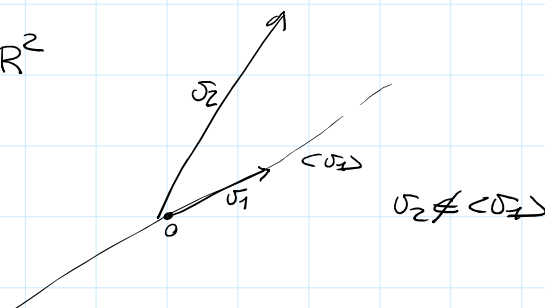
$I = \{u_1, \dots, u_k\}$ vettori linearmente indipendenti in V dato $u \in V$ l'insieme $I_1 = \{u_1, \dots, u_k, u\}$ è linearmente indipendente se e solo se $u \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Esempio: cerchiamo una base di $\mathbb{R}^2$

$$B = \{v_1, v_2\}$$

$$v_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \{v_2\}$$



Teorema di completamento a base:

Siano $I = \{u_1, \dots, u_k\}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora esiste una base B di V che contiene I .

Dim:

Passo 1: i vettori di I sono generatori di V ?

Se la risposta è sì $B = I$.

Se la risposta è No andare al Passo 2.

Passo 2: se $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \subsetneq V$ certamente esiste un vettore $u_{k+1} \in V \setminus \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ cioè $u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ allora

$I_1 = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ è linearmente indipendente e riparto dal Passo 1 usando l'insieme I_1 invece di I .

L'algoritmo termina dopo un numero finito di passi perché V è finitamente generato.

Esempi:

1) Dati i vettori $I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$ determinano una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga I .

$u_1 \qquad u_2$

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$au_1 + bu_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a+b \\ 5a-8b \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$u_4 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+c \\ 3a+b \\ 5a-8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio: $I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ completare I ad una base B di $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} u_1 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ u_2 - u_1 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$u_1 \quad u_2 \quad e_3 \quad e_4$

Esercizio: $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle$ Determinare una base B_W di W .

Svolgimento:

Mettiamo i generatori $w_1, \dots, w_5$ di W come righe di una matrice

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 - 2w_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 - (w_2 - 2w_1) \\ w_4 + w_2 - 2w_1 \\ w_5 - 2w_1 - 3(w_2 - 2w_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - 2w_2 + 2w_1 \\ w_4 + w_2 - 2w_1 \\ w_5 - 3w_2 + 4w_1 + 2w_4 + 2w_2 - 2w_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = B_W$$

Dalla matrice ridotta vediamo che $\{w_1, w_2, w_4 + w_2 - 2w_1\}$ è base di W
 $w_3 - 2w_2 + 2w_1 = \vec{0} \quad w_3 \in \langle w_1, w_2 \rangle$
 $w_5 + 2w_1 - w_2 + 2w_4 = \vec{0} \quad w_5 \in \langle w_1, w_2, w_4 \rangle$

quindi anche $\{w_1, w_2, w_4\}$ è base di W .

Esempio:

Determinare una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ che contenga

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^4$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{R}^{\leq 3}[x] = \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \}$$

Determinare una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ che contenga

$$I = \{ x + x^2 + 3x^3, x^3 \}$$

$$0 \cdot 1 + x + x^2 + 3x^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema dello scambio:

Se $I = \{ u_1, \dots, u_k \}$ vettori linearmente indipendenti di V
e $G = \{ w_1, \dots, w_p \}$ generati
allora $k \leq p$.

Dimostrazione:

$$G_1 = \{ w_1, u_1, w_2, \dots, w_p \} \text{ genere } V$$

$\hookrightarrow$

$$G = \{ w_1, \dots, w_p \} \text{ genere } V$$

$$\overline{G}_1 = \{ u_1, w_2, \dots, w_p \}$$

$$u_1 \in V = \langle w_1, \dots, w_p \rangle$$

$$u_1 = \sum_{i=1}^p a_i w_i \Rightarrow 1 \cdot u_1 - \sum_{i=1}^p a_i w_i = \vec{0}$$

è una relazione di dipendenza tra i vettori di G_1 con coefficiente di $u_1 \neq 0$.

Essendo $u_1 \neq \vec{0}$ perché appartiene ad I è lin. indep. allora esiste

un coefficiente $a_i \neq 0$ a meno dell'ordine possiamo supporre $a_1 \neq 0$

$$1 \cdot u_1 - a_1 w_1 - a_2 w_2 - \dots - a_p w_p = \vec{0}$$

1

$a_i \neq 0$

possiamo eliminare w_1

$$\overline{G}_1 = \{u_1, w_2, \dots, w_p\} \text{ genera } V$$

$I = \{u_1, \dots, u_k\}$ continuo a scambiare i vettori u_i con w_i

$$\begin{array}{l} I = \{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_k\} \\ G = \{w_1, \dots, w_p\} \end{array}$$

Se per assurdo $K > p$

$$\overline{G}_p = \{u_1, \dots, u_p\}$$

$$u_{p+1} \in V = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$$

$I = \{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_k\}$ sono lin. indep.

è assurdo perché se $u_{p+1} \in \langle u_1, \dots, u_p \rangle \Rightarrow I$ è lin. dipendente per il criterio. $\square$

Corollario: se B_1 e B_2 sono due basi di V allora il numero di vettori di B_1 = numero di vettori di B_2 = $\dim V = \dim(V)$

Dim:

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$$

$$\text{Tesi } m = n$$

$$B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$B_1 \quad I = B_1$$

T. scambio

$$m \leq n$$

$$B_2 \quad G = B_2$$

$$m = n.$$

$$B_1 \quad G = B_1$$

T. scambio

$$n \leq m$$

$$B_2 \quad I = B_2$$

$$V \leq \mathbb{R}^3$$

$$3$$

$$3$$

$$\Rightarrow V = \mathbb{R}^3.$$

v_1, v_2, v_3 lin. indipendenti

$$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Formule di Grassmann:

$U, W \leq V$ V di dimensione finita

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$3$$

$$=$$

$$2$$

$$+$$

$$1$$

$$-$$

$$?$$

Esempio:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U = 2 \quad B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 1$$

$$U+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$u_1 \quad u_2 \quad w$

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{u_2 - 2u_1} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(U+W) = 3$$